வகை நுண் கணிதம்

மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—123

வகை நுண்கணிதம்

(DIFFERENTIAL CALCULUS)

ஆசிரியர்

டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை,
கணிதப் பேராசிரியர்,
அழகப்பா தொழில்நுட்பக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—March, 1966
Reprint—March, 1971
Reprint—August, 1977
Number of Copies—2,000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 123

DIFFERENTIAL CALCULUS

T. K. MANICAVACHAGOM PILLAY

Price Rs. 4-75

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional *paper made available by the Government of* India.

Printed by
Srinivasam Press The Jupiter Enterprises,
1, Smith Lane, Mount Road,
Madras-600 002.

பதிப்புரை

வகை நுண்கணிதம் என்ற இந் நூல், தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் சார்பில் வெளியான 123 ஆவது வெளியீடாகும். இதன் முந்தைய பதிப்புப் படிகள் அனைத்தும் விற்பனையாகிவிட்டன. ஆதலின், இப்பொழுது இந் நூல் மீண்டும் வெளிவருகின்றது. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்'தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

மேலாண்மை இயக்குநர்
தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

முதற்பதிப்பின் முன்னுரை

நம் நாட்டுத் தலைவர்கள் கல்லூரிப் பாடங்களையும் தாய் மொழியில் கற்பிக்கவேண்டும் என்று கூறி வருகின்றனர். அக் கொள்கை போற்றத்தகுந்த ஒன்றாகும். அதற்குரிய பாடப் புத்தகங்கள் தமிழ்மொழியில் இல்லாதது ஒரு பெருங் குறையே யாகும். அக் குறையை நீக்கும்பொருட்டு நானும் வகை நுண்கணிதம் (Differential Calculus) என்னும் நூலைத் தமிழ் மொழியில் எழுத முற்பட்டேன்.

தென்னிந்திய பல்கலைக் கழக முதல் பட்ட வகுப்புக்குரிய வகை நுண்கணிதப் பகுதிகள் இந் நூலின்கண் அடங்கியுள்ளன. சென்னைத் தமிழ் வளர்ச்சிக் கழகம் இந் நூலின் எழுத்துப் பிரதிக்கு 1949ஆம் ஆண்டில் பரிசு வழங்கியது.

இந் நூலை வெளியிட முன்வந்த தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத் தினருக்கும் அதைப் போற்றுதற்குரிய முறையில் அச்சிட்ட தமிழ் நாட்டு அரசினர் அச்சகத்திற்கும் எனது நன்றி உரித்தாகுக.

T. K. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை

பொருளடக்கம்

1. சார்புகள், எல்லைகள்

(Functions and Limits)

நுண்கணித வரலாறு

கணித வளர்ச்சியில் 17 ஆவது நூற்றுண்டு ஒரு சிறப்பான காலம் என்று அறிதல் வேண்டும். இன்று கணிதம் அடைந்திருக்கும் பெரியதொரு வளர்ச்சிக்குரிய அடிப்படைக் கொள்கைகளான (1) இயல்முறை வடிவக் கணிதம் (Analytical Geometry), (2) வகை, கூட்டு நுண்கணிதம் (Differential and Integra Calculus), (3) ஏற்படுகையின் கொள்கை(Theory of Probability), (4) உயர் எண் கணிதம் (Higher Arithmetic), (5) இயக்கவியல் (Dynamics), (6) கவர்ச்சி (Gravity) என்பவை 17 ஆவது நூற்றுண்டில்தான் உருப்பெற்றன. கணிதப் பேராசிரியர் லீபினிட்சு (Liebnitz) என்பவர் இங்ஙனம் பல்வேறு வகையாகச் சிறந்தோங்கிய கணித வளர்ச்சியைக் குறிப்பிடுகையில், உலகம் தோன்றிய நாள் முதல் நியூட்டன் காலம்வரை வளர்ந்த கணிதத்தின் பெரும் பகுதியை நியூட்டன் ஒருவரே கண்டார் என்று கூறியதாக அறிகிறோம். இதனுல் இந் நூற்றுண்டின் சிறப்பினை அறியலாம்.

முதன் முதலில் இயல்முறை வடிவக் கணிதத்தை வகுத்தவர் டிஸ்கார்ட்டசு (Descartes, 1596-1650) என்ற பிரெஞ்சுக்காரர். அவர் வகுத்த அக் கணிதத்தின் சுருக்கமாவது : ஒரு வளைவரை தன்னிடத்து இருக்கும் புள்ளிகள் அனைத்திற்கும் பொதுவான சிறந்த ஒரு பண்பால் வரையறுக்கப்படும். (எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு புள்ளியின் தொலை நிலைப் புள்ளியிலிருந்து மாருததாகின் அப் புள்ளியின் இயங்குவரை அந் நிலைப் புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டமாகும்). இவ் வரையறைக்குத்தக x, y என்பவை $f(x, y) = 0$ என்ற தொடர்பால் இணைக்கப்படுமெனின், வளைவரையிலுள்ள புள்ளிகள் அனைத்தின் ஆயத்தொலைகள், இத் தொடர்பினுல் கணக்கிடப்படும். மேலும் $f(x, y) = 0$ தொடர்புக்குத்தக ஒரு வளைவரையும், ஒரு வளைவரைக்குத்தக $f(x, y) = 0$ போன்ற ஒரு சமன்பாடும் எப்பொழுதும் காண இயலும். இதனுல் வடிவக் கணிதப் பண்புக்

குத் தக வளைவரைச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு பண்பு உண்டென அறியலாம். ஆகவே, வடிவக் கணிதப் பண்புகளை இயற் கணிதப் பண்புகளாக மாற்றமுடியும். தலைமாற்றி உரைக்கின் ஒரு சமன்பாட்டின் பண்புகளை அதன் வளைவரையின் வடிவக் கணிதப் பண்புகளோடு தொடர்புபடுத்தலாம். ஆகவே, வளை வரைகளின் வடிவக் கணிதப் பண்புகளை ஆராய்வதற்குச் சார்பு களின பண்புகளை அறிதல் வேண்டும். சார்புகளின் பண்புகளை அறிய நுண்கணிதம் துணை செய்யும். முதலிற் கண்டுபிடிக்கப் பட்டது இயல்முறை வடிவக் கணிதமெனினும், அது நுண்கணி தம் காணப்பட்ட பின்னரே வியத்தகு முறையில் வளர்ந்திருக் கின்றது.

கணித வல்லுநர்கள் நுண்கணிதம் தோன்றிய ஒரு நூற் றாண்டுக்குள் வடிவக் கணிதம், வானநூல், இயக்கவியல் முதலான துறைகளில் அதனைப் பெரிதும் பயன்படுத்தினர். அதற்குமுன் ஏறக்குறைய இருபது நூற்றாண்டுகளாகக் கணித ஆராய்ச்சியில் வடிவக் கணிதமும் வானநூலுமே முதலிடம் பெற் றன. இவ்விரு கலைகளிலும் ஏற்பட்ட சிக்கல்களை நுண்கணித வாயிலாகத்தான் தீர்க்க முடிந்தது. ஆகவே, நுண்கணிதம் இத்தகைய சிறப்புடையதாதலின் ஆராய்ச்சியாளர்கள் அத னையே ஒரு நூற்றாண்டுவரை பெரிதும் ஆராய்ந்ததில் வியப் பில்லை.

கணிதத்திலும், இயற்கையிலும் வரும் தொடர்ச்சியான நிகழ்ச்சிகளை (எடுத்துக்காட்டாகச் சூடு ஓட்டம், மின்சாரம்) ஆராய்வதற்கு நுண் கணிதமே துணைசெய்ய முடியும். வான நூல், பௌதிகம், வேதிநூல் முதலியவற்றில் வரும் சிறந்த சமன்பாடுகள் எல்லாம் வகைக்கெழு, கூட்டுக்கெழு என்றிவை அடங்கிய சமன்பாடுகளே ஆகும். இன்றைய விஞ்ஞானத் துறைகள் அனைத்தும் நுண் கணிதத்தைச் சார்ந்தே வளருகின் றன என்பது வெள்ளிடைமலை.

இனி, நுண் கணிதத்தைக் கண்ட முதல்வர் யார் என் பதைப் பார்ப்போம். ஆங்கிலக் கணிதப் பேராசிரியரான நியூட் டன் (1642—1727) என்பர் ஒரு சாரார்; மற்றொரு சாரார் லீபினிட்சு (1646—1716) என்ற ஜெர்மானிய நாட்டவர் என்பர் நியூட்டனின் நண்பர்களுள் சிலர் அவரிடமிருந்து லீபினிட்சு நுண்கணித முறையைக் களவாடிக் கொண்டார் என்றுகூடப் பழி சுமத்தினர். இருவருள் காலத்தால் முந்திக்கொண்டவர் நியூட்டனே எனினும், கண்டுபிடிப்பு ஒருவருக்கொருவர் தொடர்பில்லாமலே தனித்தனியாக நிகழ்ந்தது என்பதான்து

உண்மை. நாட்டுப்பற்றின் காரணமாக ஆங்கிலேய கணித ஆராய்ச்சியாளர்கள் நியூட்டன் குறியீடுகளைக் காட்டிலும் பன் மடங்கு சிறந்த லீபினிட்சின் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தினார் களில்லை. அதனால், 18ஆவது நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில் இங்கிலாந்து, மற்ற ஐரோப்பிய நாடுகளையொட்டிக் கணித ஆராய்ச்சியில் முன்னேறவில்லை.

தாமசு சிம்சன் (Thomas Simpson, 1710-1761), ஆசிபிட்டல் (L'Hospital, 1661 – 1704), ஆயிலர் (Euler, 1707—1783), லெகிராஞ்சு (Lagrange, 1736 – 1831), காசு (Gauss, 1770—1855), கோசி (Cauchy, 1789 – 1857), வெயிர்டிராசு (Weirtrass, 1815—1897) என்பவர்கள் நுண்கணித வளர்ச்சிக்குப் பெருங் காரணமாவார்கள்.

1. மாறா ராசிகளும், மாறு ராசிகளும் (Constants and variables)

ஒரு முக்கோண உறுப்புகளின் அளவு எதுவாக இருப்பினும் அதன் கோணங்களின் கூட்டளவு 180°. முக்கோணங்களின் உறுப்புகள் மாறும் தன்மை உடையன. ஆனால், ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூட்டளவு மாறும் தன்மை அற்றது. மேல்நோக்கி எறியும் ஒரு கல்லின் உயரம், புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து ஓடிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு காரின் தொலை முதலியவை மாறும் தன்மையுடையன. ஒருபோகுக் கோடு (parallel straight lines) இரண்டின் இடை அகலம், இரண்டு ஒருபோகுக் கோடுகளின் இடையில் அமைந்தும், ஒரே அடி (base) மேலுள்ள முக்கோணங்களின் பரப்பளவு, ஒரே வில்லில் (arc) அமைந்துள்ள கோணங்கள் முதலியவை மாறும் தன்மையற்றன. மாறும் தன்மையுள்ள இராசிகளுக்கு மாறு ராசிகள் என்றும், மாறாத் தன்மையுள்ள இராசிகளுக்கு மாறா ராசிகள் என்றும் பெயர் உண்டு. மாறா எண்களுக்கு நாம் எண்ணுவது போல் மதிப்புக் கொடுக்க முடியாது. ஆனால், மாறும் எண்களுக்கு எம் மதிப்பு வேண்டுமானாலும் கொடுக்கலாம். மாறா எண்களை $a, b, c, \ldots$ என்ற எழுத்துகளாலும், மாறும் எண்களை $x, y, z, \ldots$ என்ற எழுத்துகளாலும் குறிப்பிடுவது மரபு.

2. சார்புகள் (Functions)

நீண்டதொரு சதுரத்தின் பரப்பளவைக் காண அதன் நீளத்தையும் அகலத்தையும் பெருக்கவேண்டும். நீளமும் அகலமும் எவ்வளவு வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம். ஆனால், அதன் பரப்பு அவ்விதமில்லாமல் அதன் நீளத்தையும் அகலத்தையுமே பொறுத்தது. இதனால் பரப்பளவு, நீளம், அகலம் இவற்றின்

ஒரு சார்பலன் அல்லது சார்பு (function) என்று பெயர்பெறும். நீளத்தையும் அகலத்தைவும் சார்பில் மாறிகள் (independent variables) என்றும், பரப்பளவைச் சார்புடைய மாறி (dependent variable) என்றும் சொல்லுவோம்.

3. சார்புத் தொடர்பு (Functional relation)

பொதுவாக, x, y, மாறிகளில், ஒன்றின் மதிப்பு மற்றென்றின் மதிப்பைப் பொறுத்து இருக்குமெனின், ஒவ்வொன்றும் மற்றதொன்றின் சார்பு எனப்படும். அவற்றின் தொடர்பைக் காட்டும் சமன்பாடு சார்புத் தொடர்பு (functional relation) என்று கூறப்படும். இதனை $y = f(x)$ அல்லது $x = \phi(y)$ அல்லது $F(x, y) = 0$ என்ற குறியீடுகளினால் எழுதுவது வழக்கம்.

எடுத்துக்காட்டாக :

1. ஒரு கோளத்தின் (sphere) கன அளவு, அதன் ஆரையின் (radius) சார்பாகும்.

$$V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு அதன் அடியையும் உயரத்தையும் கொண்ட ஒரு சார்பாகும்.

$$A = f(b, h) = \tfrac{1}{2} bh.$$

3. $y = f(x)$ எனின் x-ன் மதிப்பு a ஆக இருக்கும்பொழுது y-ன் மதிப்பு $f(a)$. எடுத்துக்காட்டாக, $f(x) = x^2 + 3x + 2$ எனின்,

$$\begin{aligned} f(a) &= a^2 + 3a + 2 \\ f(2) &= 2^2 + 3 \times 2 + 2 = 12 \\ f(0) &= 0^2 + 3 \times 0 + 2 = 2 \\ f(-3) &= 3^2 + 3(-3) + 2 = 2 \end{aligned}$$

மேலே காட்டிய சார்பைப்போல், சில சார்புகளில்தான் x-ன் ஒவ்வோர் அசல் மதிப்புக்கும் (real value) y-க்கு அசல் மதிப்புக் கிடைக்கும்.

$y = \sqrt{1 - x^2}$ என்ற சார்பைக் கவனிப்போம். $-1, 1$ என்ற இவ்விரு எண்களின் இடையில் x-ன் மதிப்பு இருந்தால் தான் y-க்கு அசல் மதிப்புக் கிடைக்கும்; x-ன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேலாகவோ, -1-க்குக் குறைவாகவோ இருந்தால் y-க்குக் கற்பனை மதிப்புத் (imaginary value) தான் கிடைக்கும்.

ஆகவே, — 1 முதல் 1 வரையுள்ள x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் y வரையறுக்கப்படுகிறது. அதற்கு அப்பாலுள்ள மதிப்புகளுக்கு y வரையறுக்கப்படவில்லை.

அடுத்தபடியாக, $y = \frac{x}{1-x}$ என்ற சார்பில் ஒன்றைத் தவிர மற்றைய எல்லா மதிப்புகளையும் x-க்குக் கொடுத்தால், அதற்கு எதிர்நிலையான y-ன் அசல் மதிப்பைக் காணலாம். x-ன் மதிப்பு ஒன்றாக இருந்தால் $y = \frac{1}{0}$ என்ற வரம்பற்றமதிப்புக் கிடைக்கும். ஒன்றைத் தவிர மற்றைய எல்லா x-ன் மதிப்புகளுக்கும் இந்தச் சார்பில் y வரையறுக்கப்படுகிறது.

4. ஒரு மதிப்புடைய சார்புகள், பன்மதிப்புடைய சார்புகள் (Single valued and many valued functions)

ஒரு சார்பில், x-ன் ஒரு மதிப்புக்கு எதிர்நிலையான y-க்கு ஒரே ஒரு மதிப்பு மட்டுமே கிடைக்குமானால் அது ஒரு மதிப்புடைய சார்பு (single valued function) எனச் சொல்லப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$y = \frac{2x+3}{4x-7}\,;\; y = \cos x;\quad y = 2+6x-3x^2$$

ஒரு சார்பில் x-ன் ஒரு மதிப்புக்கு எதிர் நிலையாக y-க்கு ஒன்றிற்குமேல் பல மதிப்புகள் கிடைத்தால், அது பன்மதிப்புடைய (many valued) சார்பு எனச் சொல்லப்படும், $y^2 = a^2 - x^2$ என்ற சார்பில், $y = +\sqrt{a^2-x^2}$ ஆகவே, x-ன் ஒரு மதிப்புக்கு எதிர்நிலையாக y-க்கு இரண்டு மதிப்புகள் உள்ளன. x-ன் மதிப்பு 2 என்றால் y-ன் மதிப்புகள் $\sqrt{a^2-4}$, $-\sqrt{a^2-4}$. ஆகவே, இந்தச் சார்பு பல மதிப்புடையதாகும்.

$y^3 - 6y^2 + 11y = 2x$ எனின் x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் எதிர்நிலையான y அடங்கிய முப்படிச் சமன்பாட்டினை (cubic equation) விடுவித்தால், y-க்கு மூன்று மதிப்புகள் வரும்.

$x = 3$ எனின் $y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$

(அ - து.) $(y-1)\ (y-2)\ (y-3) = 0$

ஆகவே $y = 1$ அல்லது 2 அல்லது 3.

$y = \sin^{-1}x$ (அஃதாவது xஐ நெடுக்கையாகக் கொண்ட கோணங்கள்) என்ற சார்பில் x-ன் ஒரு மதிப்புக்கு எதிர்நிலையாக எண்ணற்ற மதிப்புகள் y-க்கு வருகின்றன. எடுத்துக்காட்

டாக, x-ன் மதிப்பு ஒன்று என்று கொண்டால், y-ன் மதிப்பு 90° அல்லது $90^\circ+360^\circ$ அல்லது $90^\circ+n.\ 360^\circ$ (இங்கு n ஒரு முழு எண்).

5. வெளிப்படு சார்புகள், உட்படு சார்புகள் (Explicit and implicit functions)

x, y என்ற மாறிகளின் சார்புத் தொடர்பு $y=f(x)$ என்று இருக்குமெனின் y ஆனது x-ன் வெளிப்படு (explicit) சார்பு எனக் கூறப்படும்

(எ-டு.): $y=x^3+2x-3$, $y=\sin^2 x-2\cos x$

வெளிப்படு சார்புகளில், x-க்கு ஈடாக எந்த மதிப்பைக் கொடுத்தாலும், அவற்றிற்கு எதிர் நிலையான y-ன் மதிப்புகளை எளிதில் காணலாம்.

x, y என்ற மாறிகளின் சார்புத் தொடர்பு $F(x-y)=0$ என்று இருந்தால், xஐ y-ன் சார்பாகவோ, yஐ x-ன் சார்பாகவோ கருதலாம். இத்தகைய சார்புகள் உட்படு (implicit) சார்புகள் என்று கூறப்படும். உட்படு சார்புகளில் சார்பில் மாறியின் மதிப்பை நேராகச் சார்பில் ஈடுவைத்துச் சார்புடை மாறியின் மதிப்பை எளிதில் காண முடியாது.

(எ-டு.): $x^3+y^3=3a\,xy$

$\cos x+ay^2=b\tan y$

$x^2+xy+y^2=7$

முதல் எடுத்துக்காட்டில் x-க்குப் பதில் 2ஐ ஈடாகக் கொடுத்தால், $8+y^3=6ay$ என்பது வரும். இந்த முப்படிச் சமன்பாட்டை விடுவித்தல் எளிதன்று.

6. ஒற்றைச் சார்புகள், இரட்டைச் சார்புகள் (Odd and even Functions)

x-ன் குறியை மாற்றும்பொழுது ஒரு சார்பில் குறி மாற்றம் இல்லை எனின், அந்தச் சார்பு **இரட்டைச் சார்பு** (even function) என்று பெயர் பெறும்.

(எ-டு.): $y\ \cos x$; $y=4x^4-3x^2+6$. பொதுவாக $f(x)$ இரட்டைச் சார்பாக இருப்பின் $f(-x)=f(x)$ x-ன் குறியை மாற்றும் பொழுது ஒரு சார்பில் குறி மாற்றம் இருப்பின், அது **ஒற்றைச் சார்பு** (odd function) என்று பெயர் பெறும்.

(எ-டு.): $y=\sin x$; $y=x^3+6x$; $y=\tan x$ பொதுவாக $f(x)$ ஒற்றைச் சார்பாக இருப்பின் $f(-x)=-f(x)$ சார்புகளிற் சில ஒற்றையோ, இரட்டையோ இன்றி உள்ளன.

(எ-டு.): $y=ax^2+bx+c$; $y=3\sin x+4\cos x$.

7. எதிர்மறைச் சார்புகள் (Inverse functions)

$y=f(x)$ எனக் கொள்வோம். இச் சமன்பாட்டில் x-ன் சார்பாக y கொடுத்திருக்கிறது. இதனை விடுவித்து y-ன் சார்பாக xஐக் காண இயலும். அது $x=\phi(y)$ என்றால் இச் சார்புகள் எதிர்மறைச் சார்புகள் (inverse functions) என்ற பெயரைக் கொள்ளும்.

(எ-டு.) : (1) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ எனின்,

$$y(x-1) = x+1$$

$$x(y-1) = y+1$$

ஆகவே $x=\dfrac{y+1}{y-1}$

(2) $y=\sin x$ எனின் $x=\sin^{-1} y$.

(3) $y=a^x$ எனின் $x=\log_a y$.

பயிற்சி 1.

$f(x)=3x^3-5x^2+6x-4$ எனின், $f(1)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$ என்பவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

$$\begin{aligned} f(1) &= 3\cdot(1)^3-5(1)^2+6(1)-4 \\ &= 3-5+6-4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 3\cdot 2^3-5\cdot 2^2+6\cdot 2-4 \\ &= 24-20+12-4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 3\cdot 0^3-5\cdot 0^2+6\cdot 0-4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 3\cdot(-1)^3-5(-1)^2+6(-1)-4 \\ &= -18. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3(-2)^3-5(-2)^2+6(-2)-4 \\ &= -60 \end{aligned}$$

பயிற்சி 2.

$f(x)=A\cos x+B\sin x$ எனின், $f(x+2\pi)=f(x)$ என்று நிறுவுக.

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= A\cos(x+2\pi)+B\sin(x+2\pi) \\ &= A\cos x+B\sin x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

பயிற்சி 3.

$f(x)=\log\ x$ என்றால், $f(abc)=f(a)+f(b)+f(c)$ என்று நிறுவுக.

$$\begin{aligned} f(a)+f(b)+f(c) &= \log a+\log b+\log c \\ &= \log abc \\ &= f(abc) \end{aligned}$$

பயிற்சி 4.

$3x^2-7xy+2y^2+2x-y+3=0$ என்றால், x-ன் மதிப்பு 3 ஆக இருக்கும்பொழுது y-ன் மதிப்பு என்ன ?

கொடுத்திருக்கும் சமன்பாட்டில் x-க்கு ஈடாக 3 எழுதின்

$27-21y+2y^2+6-y+3=0$

(அ-து.) $2y^2-22y+36=0$

(அ-து.) $y^2-11y+18=0$

(அ-து.) $(y-2)(y-9)=0$

$\therefore\ y=2$ அல்லது 9

பயிற்சிகள் 1.

1. $f(x)=(2x-1)(x-3)$ எனின் $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(3)$ என்பவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

2. $f(x)=x^3+2x+1$ என்றால், $f(a^2)$ காண்க.

3. $f(x)=x^2+3x+6$ என்றால், $f(x^2)$, $f(x^3)$, $f(\cos x)$ காண்க.

4. $f(x)=\tan x$ என்றால், $f(x-y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)}$ என்று நிறுவுக.

5. $f(x)=x^2+x-1$ என்றால், $f(x+1)-3f(x)+2f(x-1)$ ஐச் சுருக்கி எழுதுக.

6. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ எனில், $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ என்று நிறுவுக.

7. $f(x)=A\sin x^4 x+B\cos^2 x+C$ எனின்,
$f(\pi+x)=f(\pi-x)=f(x)$ என்று நிறுவுக.

8. அடியிற் கொடுத்திருக்கும் சார்புகளுள் ஒற்றைச் சார்புகள் யாவை ? இரட்டைச் சார்புகள் யாவை ?

   1. $ax^7+bx^5+cx^3+dx$
   2. $ax^6+bx^4+cx^2+d$
   3. $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cos x$, $\sec x$, $\cot x$.

4. $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$

9. $f(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2$ எனின், $y(y, x)$, $f(x, x)$, $f(y, y)$ காண்க.

10. $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ எனின், $x = f(y)$ என்று நிறுவுக.

எல்லைகள்
(Limits)

8. மாறியின் எல்லை

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots$ என்ற பெருக்கத் தொடரைக் (Geometrical progression) கவனிப்போம். அதன் n உறுப்புகளின் (terms) கூட்டுத்தொகை S என்று கொண்டால்,

$$S = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

n-ன் மதிப்புக்கூடக்கூட $\frac{1}{2^{n-1}}$ மதிப்புக்குறைந்துகொண்டே வரும். n-ன் மதிப்பு வரம்பற்ற எண்ணை (அதாவது முடிவற்ற எண்ணை) நெருங்குகிற பொழுது $\frac{1}{2^{n-1}}$-ன் மதிப்புச் சுன்னத்தை நெருங்கும்.

$\frac{1}{2^{n-1}}$ மதிப்பை எவ்வளவு சிறிதாக ஆக்கவேண்டுமென்று எண்ணுகின்றேமோ, அவ்வளவு சிறிதாக ஆக்குவதற்கு n-ன் மதிப்பை அதற்குத் தக்கபடி பெரிதாக எடுத்தாற்போதும். ஆகவே, n-உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையான S-ன் மதிப்பினை 2-க்கு எத்துணை அருகில் கொண்டுவர விரும்புகின்றேமோ, அத்துணை அளவு கொண்டுவர இயலும். இதனால், S-ன் எல்லை 2 என்று கூறலாம்.

யாதோ ஒன்றின் விதிப்படி x கணக்கற்ற மதிப்புகள் பெறும் தன்மையுடையது எனக் கொள்வோம். $|x-a|$-ன் மதிப்பு மிகவும் சிறிய மிகை எண்ணான ξஐ விடக் குறைவாக இருக்குமாறு அந்த மதிப்புகள் நிலை எண்ணான aஐ நெருங்கினால் 'a என்ற எல்லையை x நோக்குகின்றது அல்லது நெருங்குகின்றது' என்று சொல்வோம்.

இதனை $x \to a$ என்று எழுதுவது வழக்கம்.
x-ன் எல்லை a-என்பதை $\text{Lt}\, x = a$ என்றும் எழுதுவது உண்டு.

9. சார்பின் எல்லை (Limit of a function)

$y = f(x)$ என்ற சார்பில், x-ன் மதிப்புகளுக்கு நேர் நிலையான y-ன் மதிப்புகளைக் காணலாம். aஐ x-ன் மதிப்புகள் நெருங்கும்பொழுது வேறோர் எண்ணை y-ன் மதிப்புகள் குறுகக் கூடும். அங்ஙனமாயின் ஓர் எல்லையை $f(x)$ நெருங்குகிறது என்று சொல்லலாம். இதனைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

ξ என்ற மிகை எண், எவ்வளவு சிறிதாக இருப்பினும், அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $|x - a| < \delta$ ஆக இருக்கையில், $|f(x) - l| < \xi$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கு உட்பட δ என்ற மிகை எண் காண இயலுமானல், l என்ற எல்லையை $f(x)$ நெருங்குகிறது என்று கூறலாம்.

$f(x)$-ன் எல்லை l என்று கொடுத்திருந்தால், $|x - a| < \delta$ என்று இருக்கும்பொழுது $|f(x) - l| < \xi$ ஆக இருக்கும்படி ξ, δ என்ற மிகவும் சிறிய மிகை எண்களைக் காண இயலும்.

இதனை $\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) = l$ என்று எழுதுதல் வழக்கம்.

பயிற்சி 5.

$$\underset{x \to 2}{\text{Lt}} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ காண்க.}$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ என்று கொள்வோம்.}$$

2ஐத் தவிர எந்த மதிப்பும் x-க்குக் கொடுக்கலாம். x-ன் மதிப்பு 2 ஆக இருந்தால் $\frac{0}{0}$ என்ற தேரப்பெருத(indeterminate) மதிப்பு y-க்குக் கிடைக்கும். 2ஐ நெருங்கும் மதிப்புகள் x-க்குக் கொடுத்தால் கீழே கொடுத்திருக்கும் அட்டவணையிலுள்ள மதிப்புகள் y பெறும்.

x	0	5	1	1·5	1·6	1·7	1·8	1·9	1·99	1·999
y	2	2·5	3	3.5	3·6	3·7	3·8	3·9	3·99	3·999

x	3	2·5	2·4	2·3	2.2	2·1	2·05	2·04	2·009
y	5	4·5	4·4	4·3	4·2	4·1	4·1	4·04	4·009

2ஐ x-ன் மதிப்பு நெருங்க நெருங்க 4ஐ y-ன் மதிப்பு நெருங்கும். 4-க்கும் y-க்கும் உள்ள வேற்றுமையை எவ்வளவு சிறிதாக ஆக்கவேண்டுமோ, அவ்வளவு சிறிதாக ஆக்குவதற்கு x-க்கும் 2-க்கும் உள்ள வேற்றுமையைச் சிறிதாக ஆக்கினுற் போதும்.

$$\text{ஆகவே} \ \operatorname*{Lt}_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

பிறிதொரு முறை: வரையறையிலிருந்து ஒரு சார்பின் எல்லையைக் காண்பது அவ்வளவு எளிதன்று. அதனுல் நடைமுறையில் பின்வரும் முறை கையாளப்படும்:

$\operatorname*{Lt}_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-7}$ காண்பதற்கு இச் சார்பில் x-க்குப் பதில் $2+h$ ஈடாகக் கொடுக்கப்படுகிறது.

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(2+h)^2-4}{h}$$
$$= 4+h$$

2ஐ x நெருங்கும்பொழுது சுன்னத்தை h நெருங்கும்.

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{x\to 2} \frac{x^3-4}{x-2} = \operatorname*{Lt}_{h\to 0} (4+h)$$
$$= 4.$$

10. சார்பின் எல்லையும், அதன் மதிப்பும்

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ என்ற சார்பைப் பார்ப்போம். $x = 3$ ஆக இருக்குங்கால் அதன் மதிப்பு 2. $x\to 3$ ஆக இருப்பினும் $f(x)$-ன் எல்லை 2 தான். ஆகவே, இச் சார்புக்கு எல்லையும் மதிப்பும் ஒன்ருகவே இருக்கிறது. ஆனுல், சார்புகள் எல்லாம் இவ்விதமே இருக்குமெனக் கொள்ளுதற்கில்லை. ஏனெனின், ஒரு சார்பின் எல்லையையும் மதிப்பையும் காண வெவ்வேறு முறைகளைக் கையாளுகிருேம். மதிப்புக்காண x-க்குப் பதில் சார்பில் 3ஐ ஈடாகக் கொடுக்கிருேம். ஆனுல், எல்லைகாண 3ஐ நெருங்கும் மதிப்புகளை x-க்குக் கொடுக்கிருேமேதவிர x-க்கு மதிப்பு 3 ஆகக் கொடுப்பதில்லை. மேலும் $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ என்ற சார்பைப் பார்ப்போம். 2ஐ நெருங்கும்பொழுது அதன் எல்லை 4; ஆனுல், x-ன் மதிப்பு 2 ஆக இருக்கையில் அதன் மதிப்பு $\frac{0}{0}$ என்ற தேரப்பெருத எண்ணுகும்.

11. சார்புகளின் எல்லை காணக் கையாளும் விதிகள்

(1) $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x)$ காணவேண்டுமெனக் கொள்வோம். $a+h$ என்ற மதிப்பைச் சார்பில், x-க்குப் பதில் ஈடாகக் கொடுத்து, பின்ன மேல்பாகத்தையும் பின்னக் கீழ்ப்பாகத்தையும் விரிவாக எழுதி, இரண்டிற்கும் பொதுவாகக் காணப்படும் சினை (factor) இருப்பின், அதனை நீக்கிச் சுன்னத்தோடு நெருங்கச் செய்தால் சார்பின் எல்லை கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ காணவேண்டுமாயின் இச் சார்பில் x-க்குப் பதில் $a+h$ஐ ஈடாகக் கொடுத்தல் வேண்டும்.

$$\text{அப்பொழுது } \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{(a+h) - a}$$
$$= \frac{2ah + h^2}{h}$$
$$= 2a + h.$$

$$\therefore \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} (2a + h)$$
$$= 2a.$$

(2) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} f(x)$ காணவேண்டுமானல், x-க்குப் பதில் hஐ ஈடாகக் கொடுத்து, அதற்குப்பின் 0 மதிப்பு x-க்குக் கொடுக்க வேண்டும் என்பதில்லை. இவ்வகையில் பின்ன மேல்பாகத்தையும் பின்னக் கீழ்ப்பாகத்தையும் அப்படியே விரித்து எழுதி, x ஓ, அதன்படியோ சினையாக இருந்தால், அதனை நீக்கி, x-க்குப் பதில் 0ஐ ஈடாகக் கொடுத்தாற் போதும்.

எடுத்துக்காட்டாக $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{(1+x)^3 - 1 - 3x}{x}$ காணவேண்டுமெனக்கொள்வோம்.

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{(1+x)^3 - 1 - 3x}{x} = \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{1 + 3x + 3x^2 + x^3 - 1 - 3x}{x^2}$$
$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{3x^2 + x^3}{x^2}$$
$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} (3 + x)$$
$$= 3.$$

(3) $\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}} f(x)$ காணவேண்டுமாயின், x-க்குப் பதில் $\frac{1}{y}$ ஈடாகக் கொடுத்து, y-ன் சார்பாக வரும் சார்பின் எல்லையைச் சுன்னத்தை y நெருங்கும்பொழுது கண்டாற்போதும்.

$$(\text{எ-டு.}): \underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}} \frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1} = \underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c}{\frac{a_1}{y^2}+\frac{b_1}{y}+c_1}$$

$$= \underset{y\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{a_1+by+cy^2}{a_1+b_1y+y^2}$$

$$= \frac{b}{a_1}$$

12. எல்லை காணப் பயன்படும் சில தேற்றங்கள்

$x\to a$ ஆக இருக்குங்கால் $f(x)\to\infty$, $\Psi(x)\to\beta$

என்றால் I. $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \left\{ f(x) + \Psi(x) \right\} = \infty + \beta$

II. $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \left\{ f(x).\ \Psi(x) \right\} = \infty\ .\ \beta.$

III. $\beta \neq 0$ என்றிருப்பின்

$$\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x)}{\Psi(x)} = \frac{\infty}{\beta}$$

IV. $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} f\left\{\Psi(x)\right\} = f(\beta)$

இந் நான்கு தேற்றங்களின் தெரிப்புகள் மிகவும் எளியன ஆதலின், அவற்றை இங்குக் காட்டவில்லை.

13. சில சிறந்த எல்லைகள்

n ஒரு முழு எண்ணாகவோ, பின்ன எண்ணாகவோ, குறை எண்ணாகவோ இருப்பினும் $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \frac{x^n-a^n}{x-a} = n\cdot a^{n-1}$

(a) முதலாவதாக n ஒரு முழு எண் எனக் கொள்வோம். x-க்குப் பதில் $a+h$ஐ ஈடாகக் கொடுப்போம்.

அப்பொழுது $\frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{(a+h)^n-a^n}{a+h-a}$ · ஈருறுப்புச் சேர்ப்புத்

தேற்றத்தால் (Binomial Theorem) பின்ன மேல்பாகத்தை விரித்து எழுதலாம். அப்பொழுது,

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{a^n + n\,a^{n-1}\,h + \frac{n(n-1)}{\angle 2}\,a^{n-2}\,h^2 + \dots + h^n - a^n}{h}$$

$$= n\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\angle 2}\,a^{n-2}h + \dots + h^{n-1}$$

முதல் உறுப்பைத் தவிர வேறெல்லா உறுப்புகளிலும் h இருக்கிறது.

$$\underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \frac{x^n - a^n}{x-a} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ n\cdot a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\angle 2}\cdot a^{n-2}h \dots + h^{n-1}$$

$$= n\cdot a^{n-1}$$

(b) $n = \dfrac{p}{q}$ என்று கொள்வோம். இங்கு p, q முழு எண்கள்.

$x = y^q$, $a = b^q$ எனக்கொளின் $x \to a$ ஆக இருக்கையில் $y^q \to b^q$.

ஆகவே, $y \to b$.

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{x^{p/q} - a^{p/q}}{x-a} = \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q}$$

$$\therefore \quad \underset{x\to a}{\text{Lt}}\ \frac{x^n - a^n}{x-a} = \underset{x\to b}{\text{Lt}}\ \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q}$$

$$= \underset{y\to b}{\text{Lt}}\ \left(\frac{y^p - b^p}{y-b}\right) \div \left(\frac{y^q - b^q}{y-b}\right)$$

$$= \underset{y\to b}{\text{Lt}}\ \frac{y^p - b^p}{y-b} \div \underset{y\to b}{\text{Lt}}\ \frac{y^q - b^q}{y-b}$$

$$= p\cdot b^{p-1} \div q\cdot b^{q-1} \quad \left\{ \ (a)\text{ஐப் பயன்படுத்துக.} \ \right\}$$

$$= \frac{p}{q}\ b^{p-q}$$

$$= \frac{p}{q}\cdot b\ \left(\frac{p}{q} - 1\right)$$

$$= \frac{p}{q}\ a\ \frac{p}{q} - 1$$

$$= n\cdot a^{n-1}$$

(c) n-ன் மதிப்பு $-m$ என்ற குறை எண் எனக் கொள்வோம். ஆகவே, m ஒரு மிகை எண்ணாகும்.

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x-a}$$

$$= \frac{a^m - x^m}{x^m a^m (x-a)}$$

$$= -\frac{1}{x^m a^m} \cdot \frac{x^m - a^m}{x-a}$$

$$\therefore \quad \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \left(-\frac{1}{x^m a^m} \cdot \frac{x^m - a^m}{x-a} \right)$$

$$= -\underset{x \to a}{\text{Lt}} \left(x \frac{1}{m} a \right) \cdot \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^m - a^m}{x-a}$$

$$= -\frac{1}{a^{2m}} \cdot m\, a^{m-1}$$

$$= -m \cdot a^{-m-1}$$

$$= -m\, a^{-m-1}$$

$$= -n \cdot a^{-1}$$

ஆகவே, n எந்த அளவுக்கிணங்கிய (rational) எண்ணாக இருப்பினும்,

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x-a} = n \cdot a^{n-1}$$

பயிற்சி 6.

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^{5/8} - a^{5/8}}{x^{1/8} - a^{1/8}} \text{ காண்க.}$$

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^{5/8} - a^{5/8}}{x^{1/8} - a^{1/3}} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^{5/8} - a^{5/8}}{x-a}$$

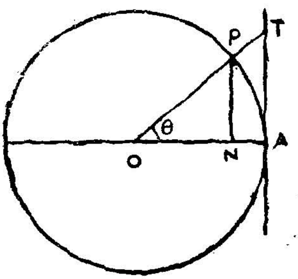
$$= \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x-a}$$

$$= \frac{5}{8} \cdot a^{5/8-1} \div \tfrac{1}{3} a^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{1} \frac{a^{-3/8}}{a^{-2/3}} = \frac{15}{8} \cdot a^{\frac{7}{24}}$$

14. $\underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ (θ, ஆரையன் அளவையாகும்).

Oஐ மையமாகவும், rஐ ஆரையாகவும் கொண்டு ஒருவட்டம் வரைந்து, அதில் $A\,O\,P$-ன் மதிப்பு θ ஆரையனாகக் (radian) கொள்வோம். P-யிருந்து OA-க்கு PN குத்துக்கோடும், A-வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் தொடுவரையும் வரைக.



படம் 1

இந்தத் தொடுவரை OPஐ T-ல் வெட்டின்

$\triangle AOP <$ வட்டப்பகுதி AOP
$< \triangle AOT$

(அ-து.) $\frac{1}{2}\, OA \cdot PN < \frac{1}{2}\, OP^2 . \theta$
$< \frac{1}{2}\, OA \cdot AT$

(அ-து.) $\frac{1}{2}\, r \cdot r \sin\theta < \frac{1}{2} r^2 \theta$
$< \frac{1}{2}\, r \cdot r \tan\theta$

$\frac{1}{2} r^2 \sin\theta < \frac{1}{2} r^2 \theta < \frac{1}{2} r^2 \tan\theta$

$\frac{1}{2} r^2 \sin\theta$ ஆல் வகுப்பின்

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

ஆகவே, $$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} < \cos\theta$$

$\cos\theta$, 1 இவற்றின் இடையே $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$-ன் மதிப்பு இருக்கும். ஆகவே, $\cos\theta$, 1 இவற்றின் எல்லைகளின் இடையே $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$-வின் எல்லை இருக்கும்.

$\theta \to 0$ ஆக இருக்கும்பொழுது $\cos\theta$-வின் எல்லை 1

ஆகவே, $$\underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

பயிற்சி 7.

$\underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\tan\theta}{\theta}$ காண்க.

$$\underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\tan\theta}{\theta} = \underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin\theta}{\theta} \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin\theta}{\theta}\ \underset{\theta \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= 1.$$

பயிற்சி 8.

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{1-\cos x}{x} \text{ காண்க.}$$

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{1-\cos x}{x} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left\{ \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right\}^2 \cdot \frac{x}{2}$$

$$= \left\{ \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right\}^2 \cdot \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x}{2}$$

$$= 1 \times 0$$

$$= 0.$$

பயிற்சி 9.

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{1-\cos x}{x^2} \text{ காண்க.}$$

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{1-\cos x}{x^2} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left\{ \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right\}^2 \times \tfrac{1}{2}$$

$$= 1 \times \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

15. $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(a) n ஒரு முழு எண் எனக்கொள்வோம். ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றத்தினால்

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{\angle 2\, n^2} \dots\dots\dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{\angle n} \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{\angle 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{\angle 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{\angle n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

இவ்விரிவில் $(n+1)$ உறுப்புகள் உள்ளன.

n-ன் மதிப்பு கூடக்கூட இவ்விரிவின் உறுப்புகளின் எண்ணும், மூன்ருவது உறுப்பு முதல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் மதிப்பும் கூடிக்கொண்டே போகின்றது. ஆகவே, x-ன மதிப்பு கூடும்பொழுது $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$-ன் மதிப்பும் கூடுகிறது.

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$-ன் உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் மிகை எண்ணுனதாலும், $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$-ன் மதிப்பு n-ன் மதிப்பிற்கிணங்கிக் கூடுவதாலும், n-ன் எல்லை எண்ணிலியாக இருந்தால் $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$-ன் எல்லை எண்ணிலி அல்லது ஒரு நிலை எண்ணுகும்.

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$-ன் விரிவில் 3 ஆவது உறுப்பு முதல் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அதற்கு எதிர் நிலையான $1 + 1 + \frac{1}{\angle 2} + \frac{1}{\angle 3} + \ldots\ldots + \frac{1}{\angle n}$ என்ற கோவையின் (Series) உறுப்பினைவிடச் சிறியதாக இருக்கிறது.

ஆகவே, $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{\angle 2} + \frac{1}{\angle 3} + \ldots\ldots + \frac{1}{\angle n}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$< 3$$

ஆகவே, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$-ன் எல்லை எண்ணிலியாக இருத்தல் முடியாது.

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ ஒரு நிலை எண்.}$$

இந்த நிலை எண்ணை e என்ற எழுத்தால் குறியீடு செய்வது வழக்கம்.

(b) n ஒரு பின்ன எண் என்று கொள்வோம். ஆகவே, அடுத்தடுத்த முழு எண்கள் இரண்டினுக்கிடையில் n இருக்கிறது. அவ்வெண்களை m, $m+1$ என்று கொள்ளின்

$$m < n < m+1$$

$$\text{அஃதாவது } \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$$

$$(\text{அ-து.})\ 1+\frac{1}{m+1} < 1+\frac{1}{n} < 1+\frac{1}{m}$$

$m < n < m+1$ ஆதலின்

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

எண்ணிலியை n நெருங்கும்பொழுது, எண்ணிலியை m, $m+1$ என்பதையும் நெருங்குகின்றன.

$$\underset{m\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \underset{m\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

$$= \underset{m\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \underset{m\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

$$= e \ (m \text{ ஒரு முழு எண்})$$

$$\underset{m\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m = \underset{m\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \div \underset{m\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)$$

$$= e$$

$$\text{ஆகவே, } \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lt}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(c) n-ன் மதிப்பு ஒரு குறை எண் என்று கொள்வோம் ஆகவே, $n = -m$ (m ஒரு மிகை எண்).

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}$$

$$= \left(\frac{m}{m-1}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m$$

$$= \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)$$

எண்ணிலியை n நெருங்கும்பொழுது, எண்ணிலியை $(m-1)$ நெருங்கும்.

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \underset{m-1\to\infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$$

$$\underset{m-1\to\infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{n} = e$$

$$\text{ஆகவே, } \underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e.$$

16. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$-ன் விரிவு, 2ஐக் காட்டிலும் பெரியது என்று அதன் விரிவில் இருந்து காணலாம்.

ஆகவே, $2 < e < 3$

மேலும், e ஒரு பொது அளவற்ற (incommensurable) எண்ணாகும். அஃதாவது அதன் மதிப்பை $\frac{a}{b}$ என்பதுபோல் ஒரு பின்னமாக எழுதுதல் இயலாது. இதன் மதிப்பு 500 பதின் பகுப்பு இலக்கங்கள் வரை கணிக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் மதிப்பு 2.7182818285......... இவ்வெண், கணிதத்தில் ஒரு சிறந்த எண்ணாகும்.

பயிற்சி 10.

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} \text{ காண்க}$$

x-க்குப் பதில் $\frac{1}{n}$ ஐ ஈடாக்கின்

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \left(1+x\right)^{1/x} = \underset{1/n\to 0}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e.$$

பயிற்சி 11.

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{ex - 1}{x} \text{ காண்க.}$$

$ex - 1 = y$ என்று கொள்ளின் $e^x = 1 + y$

$$\therefore \quad x = \log_e (1 + y)$$

சுன்னத்தை நெருங்கும்பொழுது சுன்னத்தை y நெருங்கும்.

$$\text{ஆகவே,} \quad \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x - 1}{x} = \underset{y \to 0}{\text{Lt}} \frac{y}{\log_e (1 - y)}$$

$$= \underset{y \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\log_e (1 - y)^{1}{}_{y}}$$

$$= \frac{1}{\log_e^e} = 1.$$

பயிற்சி 12.

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(1 + x)^n - 1}{x} = n \text{ என்று நிறுவுக.}$$

$(1 + x)^n - 1 = y$ என்று கொள்ளின்

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{ \frac{(1+x)^n - 1}{\log (1+x)} \quad \frac{\log (1+x}{x} \right\}$$

$$= \underset{y \to 0}{\text{Lt}} \left\{ \frac{y}{\frac{1}{n} \log (1 + y)} \quad \log (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right\}$$

$$= \underset{y \to 0}{\text{Lt}} \frac{n}{\log (1 + y)^{1/y}} \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \log (1 + x)^{1/x}$$

$$= \frac{n}{\log^e} \log^e$$

$$= n.$$

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+x)^n - 1^n}{(1+x) - 1}$$

$$= \underset{x+1 \to 1}{\text{Lt}} \frac{(1+x)^n - 1^n}{(1+x) - 1}$$

$$= n \cdot 1^{n-1}$$

$$= n.$$

பயிற்சிகள் 2.

பின்வருவனவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க:

1. $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} \dfrac{x^4-1}{x-1}$

2. $\underset{x\to 2}{\text{Lt}} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

3. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{cx+d}{ax+b}$

4. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{(1+x)^4-1}{(1+x)^3-1}$

5. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{2x^2+4x+1}{4x^2+6x+5}$

6. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x^2-px+q}{ax+b}$

7. $\underset{x\to 2}{\text{Lt}} \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-2x+5}$

8. $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} \dfrac{x^4-3x^3+2}{x^3-5x^2+3x+1}$

9. $\underset{x\to 2}{\text{Lt}} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

10. $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} \dfrac{(1+x)^3-1-3x}{(1+x)^2-1-2x}$

11. $\underset{x\to a}{\text{Lt}} \dfrac{2x^2+x(b-a)-ab}{x^2+x(c-a)-ac}$

12. $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} \dfrac{x^2+4x\to 3}{x^2-7x-8}$

13. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\dfrac{1}{(y+x)^2}-\dfrac{1}{y^2}}{x}$

14. $\underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{4x+8}{3x-7}$

15. $\underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{(1+x)^3-x^3}{x^2}$

16. $\underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{x^3+b^3}{x^3+a^3}$

17. $\underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{3x^2+4x+1}{2x^2+3x+6}$

18. $\underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{(3x+1)\,(2x+4)}{(x+1)\,(x-}$

19. $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} \dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$

20. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

21. $\underset{x\to a}{\text{Lt}} \dfrac{\sqrt{3a-x}-\sqrt{x+a}}{x-a}$

22. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

23. $\underset{x\to 2}{\text{Lt}} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x-2}}$

24. $\underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \{\sqrt{x^2+x^2+1}-x\}$

25. $\underset{n\to \infty}{\text{Lt}} \left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3}\right)$

26. $\underset{n\to \infty}{\text{Lt}} \left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}\right)$

27. $\underset{n\to \infty}{\text{Lt}} \left(\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\right)$

28. $\underset{n\to \infty}{\text{Lt}} \left(\begin{array}{l}1+2x+3x^2+\ldots n \\ \text{உறுப்புகள் } x <\end{array}\right)$

29. $\underset{\theta\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin a\,\theta}{\sin b\,\theta}$

30. $\underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\tan a\theta}{\tan b\theta}$

31. $\underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin m\theta}{\tan n\theta}$

32. $\underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1 - \cos m\theta}{1 - \cos n\theta}$

33. $\underset{x \to \pi/2}{\text{Lt}} \dfrac{\cot x}{\pi/2 - x}$

34. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin^{-1} x}{x}$

35. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$

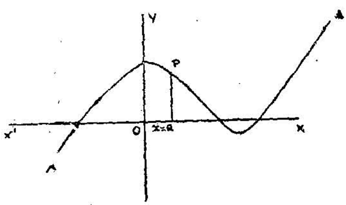
36. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \dfrac{1 + \cos \pi x}{\tan^2 \pi x}$

37. $\underset{x \to \pi/2}{\text{Lt}} (\sec x - \tan x)$

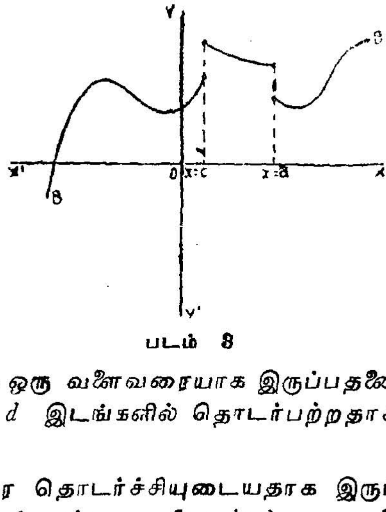
38. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \dfrac{x^{7/5} - 1}{x^{8/4} - 1}$

39. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \dfrac{x^{-1/3} - 1}{x^{-2/3} - 1}$

17. தொடருடைச் சார்புகளும், தொடரிலாச் சார்புகளும் (Continuous and discontinuous functions)



படம்-2



படம் 3

படம் 2-ல் AA தொடர்ந்த ஒரு வளைவரையாக இருப்பதனையும், படம் 3-ல் BB $x = c$, $x = d$ இடங்களில் தொடர்பற்றதாக இருப்பதனையும் காணலாம்.

சார்பொன்றின் வளைவரை தொடர்ச்சியுடையதாக இருப்பின், அது தொடருடைச் சார்பு (continuous function) எனவும், தொடர்பற்றதாக இருப்பின், அது தொடரிலாச் சார்பு (discontinuous function) எனவும் பெயர் பெறும். இவ் வரையறையை அடிப்படையாகக் கொண்டு தொடருடைச் சார்புகளின் பண்புகளை ஆராய்வோம்.

முதலாவது சார்பின் தொடர்ச்சியை x-ன் ஒரு தனி மதிப்புக்கு (எடுத்துக்காட்டாக $x = a$ என்பதற்கு) வரையறுத்தல் வேண்டும். x-ன் இம் மதிப்போடு இணைத்திருக்கும் $f(x)$-க்கே உரிய பண்புகள் யாவை ?

1. $f(x)$ இந்த மதிப்புக்கு வரையறுக்கப்படும். அஃதாவது $x=a$ என்று இருக்கையில் $f(x)$-க்கு ஒரு முடிவுள்ள (finite) மதிப்பு உண்டு. இம் மதிப்புக்கு $f(x)$ வரையறுக்காவிடில் அதற்கு எதிர் நிலையான புள்ளி வளைவரையில் இராது.

2. a-க்கு அருகில் உள்ள எல்லா x-ன் மதிப்புகளுக்கும் $f(x)$ வரையறுக்கப்படும்.

3. இரு புறங்களிலிருந்து aஐ x நெருங்கும்பொழுது $f(x)$ஐ $f(a)$ நெருங்கும்.

அஃதாவது $\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) = f(a)$

இம் மூன்று பண்புகளைத் தொடர்ச்சிக்கு அடிப்படைக் கொள்கைகள் என்று கொள்வோமாயின் கீழ்க்காணும் வரையறை பெறப்படும்:

இருபுறங்களிலிருந்து aஐ x நெருங்கும்போது $f(x)$-ன் எல்லை $f(a)$ ஆக இருப்பின், $x=a$ மதிப்பிற்கு $f(x)$ தொடருடைச் சார்பு ஆகும்.

ஒரு பல்லுறுப்புச் சேர்ப்பு (polynomial) x-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் தொடருடைச் சார்பு எனவும், அளவுக் கிணங்கிய பின்னங்கள் (rational fractions) பின்னக் கீழ்ப்பாகத்தின் தீர்வுகள் நீங்கலாக x-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் தொடருடைச் சார்பு எனவும் எளிதிற் காணலாம்.

(எ—டு.): x-ன் மதிப்பு 2, 3 என்றவற்றிற்கு $\dfrac{2x+7}{x^2-5x+6}$ தொடரற்றது.

$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\sec x$ என்ற கோண கணித சார்புகளின் வளை வரைகளை வரைந்தால், x-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $\sin x$, $\cos x$ என்பவை தொடருடைச் சார்புகள் எனவும், $\dfrac{\pi}{2}$-ன் ஒற்றைப்படையான மடங்குகள் (odd multiples) நீங்கலாக x-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $\tan x$, $\sec x$ என்பவை தொடருடைச் சார்புகள் எனவும் தாமே விளங்கும்.

18. தொடருடைச் சார்புகளைப் பற்றிய சில தேற்றங்கள்

தேற்றம் 1. $x = a$ இடத்து $f(x)$ தொடர்ந்தும், $f(a)$-ன் மதிப்பு சுன்னம் இன்றியும் இருப்பின், a-ன் அருகே உள்ள x-ன் மதிப்புக்களுக்கு $f(x)$, $f(a)$ என்பவற்றின் குறி ஒன்றே.

தேற்றம் 2. (a, b) வீச்சில் (range) $f(x)$ தொடர்ந்தும், அதன் மேலும் $f(a)$ A, $f(b)$ B என்று இருப்பின், x-ன் மதிப்பு a-விருந்து b-க்குக் கூடும்போது A, B என்பவற்றின் இடைப்பட்ட மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு தடைவையேனும் $f(x)$-ன் மதிப்பாக அமையும். மேலும் A, B தம்முள் மாறுபட்ட குறியுடையனவாக இருப்பின், a, b என்பவற்றின் இடைப்பட்ட மதிப்புகளுள் ஒன்றிற்கேனும் $f(x)$-ன் மதிப்புச் சுன்னமாக அமையும்.

2. வகைக்கெழு காணுதல்
(Differentiation)

19. வரையறை

$y=f(x)$ என்ற தொடருடைச் சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். x-ன் மதிப்புக்கூடின் y-ன் மதிப்புக்கூடவோ குறையவோ செய்யும். x, y என்பவற்றின் கூடுந்தொகைகளை (increments) $\triangle x$, $\triangle y$ என்ற குறியீடுகளால் குறிப்பிடுவது வழக்கம். x-ன் கூடுந்தொகையான $\triangle x$ மிகவும் சிறியதாக இருப்பின், அதற்கு எதிர் நிலையாகிய y-ன் கூடுந்தொகையான $\triangle y$-ம் சிறியதாகவே இருக்கும்: ஆனால், சுன்னத்தை $\triangle x$ நெருங்கும்பொழுது ஒரு முடிவுள்ள எல்லையை $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ நெருங்கும். இவ்வெல்லை xஐப் பொருத்த y-ன் வகைக்கெழு (differential co-efficient of y with respect to x) எனக் கூறப்படும். இதனை $\frac{dy}{dx}$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுவது மரபு. ஆகவே,

$y=f(x)$ எனின் $y+\triangle y=f(x+\triangle x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\underset{\triangle x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$=\underset{\triangle x\to 0}{\text{Lt}}\frac{f(x+\triangle x)\quad f(x)}{\triangle x}$$

y-ன் வகைக்கெழுவை $D_x y$ அல்லது வெறும் Dy என்றும், $f(x)$-ன் வகைக்கெழுவை $Df(x)$ அல்லது $f'(x)$ என்றும் குறிப்பிடுவதும் உண்டு.

திட்ட அமைப்புகள்
(Standard Forms)

20. x^n-ன் வகைக்கெழு

$y=x^n$ எனக் கொள்வோம். x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ ஆக இருக்கையில் y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ என்று கொள்ளின்

$$y+\Delta y = (x+\Delta x)^n$$

ஆகவே, $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$.

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$=\underset{x+\Delta x\to x}{\mathrm{Lt}}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}$$

$$=n\cdot x^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(x^n)=n\cdot x^{n-1}$$

21. e-ன் வகைக்கெழு

$y=e^x$ என்று கொள்வோம். x-ன் கூடுந்தொகை Δx ஆக இருக்கையில், y-ன் கூடுந்தொகை Δy ஆகக் கொண்டால்

$$y+\Delta y=e^{x+\Delta x}$$

ஆகவே, $\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x$

$$=(e^{\Delta x}-1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

$$=e^x\underset{\Delta x\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$=e^x.$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(e^x)=e^x.$$

22. $\log_e x$-ன் வகைக்கெழு

$$y=\log_e x$$

$$\therefore \quad y+\Delta y=\log_e(x+\Delta x)$$

$$\therefore \quad \Delta y = \log_e (x+\Delta x) - \log_e x$$

$$= \log_e \frac{x+\Delta x}{x}$$

$$\log_e = \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta x}{x}$ ஐ h என்று கொண்டால் $\Delta x \; hx$

மேலும் சுன்னத்தை, Δx நெருங்தும்பொழுது சுன்னத்தை h நெருங்கும்.

$$\text{ஆகவே, } \frac{dy}{dx} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\log_e (1+h)}{hx}$$

$$= \frac{1}{x} \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \log_e \left(1 + h\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \frac{1}{x} \log_e e$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\log_e x\right) = \frac{1}{x}$$

23. $\sin x$-ன் வகைக்கெழு

$$y = \sin x \text{ எனின், } y + \Delta y = \sin (x+\Delta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin (x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= \underset{\frac{\Delta x}{2} \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$= 1. \ \cos x.$$

$$= \cos x.$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

24. cos x-ன் வகைக்கெழு

$y = \cos x$ எனின், $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= -\underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= -1. \ \sin x.$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

25. tan x-ன் வகைக்கெழு

$y = \tan x$ எனின் $y + \Delta y = \tan(x + \Delta x)$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\tan(x + \Delta x) - \tan x)}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin(x+\Delta x)\cos x - \sin x \cos(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot \cos(x+\Delta x) \cdot \cos x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\Delta x \cdot \cos(x+\Delta x) \cdot \cos x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\cos(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{x1}{\cos x} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \sec^2 x.$$

வகைக்கெழு காணப் பயன்படும் சில தேற்றங்கள்

26. தேற்றம் 1. ஒரு நிலை எண்ணின் வகைக்கெழு

$y = c$ எனக்கொள்வோம்.

x-ன் மதிப்பு கூடும்பொழுது c-ன் மதிப்பு மாறாது.

$$y + \Delta y = c$$
$$\Delta y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

27. தேற்றம் 2. சார்பு, நிலையெண் என்றிவற்றின் பெருக்கல் தொகையின் வகைக்கெழு.

$y = cu$ என்று கொள்வோம். இங்கு c = நிலையெண், $u = x$-ன் ஒரு சார்பு.

x-ன் கூடுந்தொகையாகும் Δx-க்கு எதிர்நிலையாக y, u இவற்றின் கூடுந்தொகைகள் Δy, Δu எனின்

$$y + \Delta y = c(u + \Delta u)$$
$$\therefore \quad \Delta y = c . \Delta u$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \; c . \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= c . \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= c . \frac{du}{dx}$$

ஆகவே, சார்பு, நிலையெண் என்றிவற்றின் பெருக்கல்தொகையின் வகைக்கெழு நிலையெண் சார்பின் வகைக்கெழு என்றிவற்றின் பெருக்கல் தொகையாகும்.

28. தேற்றம் 3. சார்புகள் தம் கூட்டுத்தொகையின் வகைத்கெழு $y = u + v - w$ எனக்கொள்வோம்.

இங்கு u, v, w என்பவை x-ன் சார்புகளாகும். x-ன் கூடுந்தொகையான Δx-க்கு நேர் நிலையான u, v, w என்பவற்றின் கூடுந்தொகைகள் $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, எனின்.

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w)$$

$$\therefore \quad \Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

சுன்னத்தை Δx நெருங்கும்பொழுது

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

ஆகவே, சார்புகள் தம் கூட்டுத் தொகையின் வகைக்கெழு, சார்புகள் தம் வகைக் கெழுவின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

(எ-டு.) : $\frac{d}{dx}(4x^3 - 3x^2 - x + 7) = \frac{d}{dx}(4x^3) + \frac{d}{dx}(-3x^2) + \frac{d}{dx}(-x) + \frac{d}{dx}(7)$

$$= 12x^2 - 6x - 1$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x + K\cos x) = \cos x - K\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(a - bx)^2 = \frac{d}{dx}(a^2 - 2abx + b^2x^2)$$

$$= -2ab + 2b^2x$$

$$= -2ab + 2b^2x.$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-1/3})^3 = \frac{d}{dx}(x^{-1/2}\ 2x + 4) = 1 - x^{-1/2}\ 1$$

பயிற்சிகள் 3.

கீழ்க்கண்ட சார்புகளுக்கு வகைக்கெழு காண்க:

1. $x^1 - 3x + 2$
2. $4x^2 - 9x - 3$
3. $lx^2 + mx + n$
4. $4x^3 - 9 + 6x^2$
5. $6x^2 - 2x + \frac{1}{x}$
6. $ax^{2n} + bx^n + c$
7. $\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{\;}{x} + 4$
8. $\frac{x^3 + 4x^2 + 3}{x^2}$
9. $\sqrt[3]{x^2}$
10. $\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}}$
11. $\frac{5}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{3}{x^{\frac{1}{4}}} - \sqrt{x}$
12. $(x^2 - 3)\ (2x + 1)$
13. $\left(\frac{2x - 3}{x^2}\right)$
14. $\left(\frac{1}{x} - x\right)^2$
15. $(x^{1/2} - 2x^{1/3})\left(x - \frac{1}{x}\right)$
16. $ex + \sin x$
17. $5 \sin x + \log x$
18. $3 \log x - ex - 7$
19. $5e^x - \log x + \sqrt{x^8}$
20. $4 \log (x^2) + \sin x$
21. $\log \left(\frac{x}{e^x}\right)$
22. $\frac{1}{2}e^x - x^m$
23. $\sqrt{2} \sin x + 4x^6 - \frac{3}{x^4}$
24. $(ax)^n + b^n \log x$
25. $4x^n - 3 \cos x + e^x + 2 \sin x.$

29. தேற்றம் 4. சார்பு இரண்டின் பெருக்கல் தொகையின் வகைக்கெழு.

$y = u\,v$ எனக் கொள்வோம். இங்கு u, v என்பவை x-ன் சார்புகளாகும்.

x-ன் கூடுந் தொகை Δx ஆயின் y, u, v என்பவை கூடுந் தொகைகள் Δy, Δu, Δv என்று கொள்ளின்.

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v)$$

$$\therefore \quad \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v) - u\,v.$$

$$= u.\,\Delta v + v.\,\Delta u + \Delta u.\,\Delta v.$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = u.\frac{\Delta v}{\Delta x} + v.\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u.}{\Delta x}\Delta v$$

சுன்னத்தை Δx நெருங்கும்பொழுது Δu, Δv என்பவற்றின் எல்லைகளும் சுன்னமே.

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

ஆகவே, சார்பு இரண்டின் பெருக்கல் தொகையின் வகைக்கெழு = முதற் சார்பு × இரண்டாவது சார்பின் வகைக்கெழு + இரண்டாவது சார்பு × முதற் சார்பின் வகைக்கெழு.

பயிற்சிகள் :

$$\frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)(x+2)\right\} = (x^2+1)\frac{d}{dx}(x+2) + (x+2)\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$= x^2+1+(x+2)\,2x$$

$$= 3x^2+4x+1$$

$$\frac{d}{d}\left\{\sqrt{x}(x^2+2)\right\} = \sqrt{x}.\frac{d}{dx}(x^2+2)+(x^2+2)\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \sqrt{x}\cdot 2x+(x^2+2)\tfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\cdot x^{3/2} + \frac{x^2+2}{2x^{1/2}}$$

$$= \frac{5x^2+2}{2x^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x \sin x) = e^x.\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\,\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= e^x \cos x + \sin x.\, e^x$$

$$= e^x(\cos x + \sin x)$$

$$\frac{d}{dx}(3x^5 \log x) = 3 \left\{x^5 . \frac{d}{dx}(\log x) + \log x . \frac{d}{dx}(x^5)\right\}$$

$$= 3x^5 . \frac{1}{x} + 3 \log x . 5x^4$$

$$= 3x^4 + 15x^4 \log x.$$

30. $y = u\,v\,w$ எனின் $\frac{dy}{dx} = u\,v\frac{dw}{dx} + w\frac{d}{dx}(uv)$

($u\,v$ஐ ஒரு சார்பாகக் கருதுக.)

$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + w\left(u\frac{dv}{dx} + u\frac{du}{dx}\right)$$

$$= u\,v\frac{dw}{dx} + wu\frac{dv}{dx} + wv\frac{du}{dx}.$$

$u\,v\,w$ஆல் வகுப்பின்

$$\frac{1}{u\,vw}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ஆகவே, $\frac{1}{y}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{yx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx}.$

இது போல u_1, u_2, u_3 .... u_n x-ன் சார்புகளோடு $y = u_1, u_2, u_3$ .... n என்றும் இருப்பின்

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}\frac{du_1}{dx} + \frac{1.}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \ldots\ldots + \frac{1.}{u_n}\frac{du_n}{dx}$$

பயிற்சி 1.

$x(x^2 - 1)(x^2+4)$ வின் வகைக்கெழு யாது ?

$y = x(x^2-1)(x^2+4)$ என்று கொள்ளின்

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x) + \frac{1}{x^2-1}\frac{d}{dx}(x^2-1) + \frac{1}{x^2+4}\frac{d}{dx}(x^2+4)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2+4}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2-1)(x^2+4) + 2x^2(x^2+4) + 2x^2(x^2-1)$$

பயிற்சி 2.

$e^x \sin x \log x$-ன் வகைக்கெழு யாது ?

$y = e^x \sin x \log x$ எனின்

$$\frac{1}{v}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^x}\,\frac{d}{dx}\,(e^x) + \frac{1}{\sin x}\,\frac{d}{dx}\,(\sin x) + \frac{1}{\log x}\,\frac{dx}{d}\,(\log x)$$

$$= \frac{1}{e^x}\,e^x + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\log x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = e^x \sin x \log x + e^x \log x \cos x + \frac{e^x \sin x}{x}$$

31. தேற்றம் 5. சார்பு இரண்டின் ஈவின் வகைக்கெழு

$y = \frac{u}{v}$ எனக் கொள்வோம். இங்கு u, v, x-ன் சார்புகளாகும்.

x-ன் கூடுந்தொகை Δx, ஆகின் y, u, v என்பவற்றின் கூடுந் தொகைகள் Δy, Δu, Δv எனின்

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{u + \Delta v}$$

$$\therefore \quad \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\,\Delta v}$$

சுன்னத்தை Δx நெருங்கும் பொழுது, சுன்னத்தை Δv நெருங்கும்.

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

பிறிதொரு முறை : $y = \frac{u}{v}$ $\qquad u = vy$

இரு பக்கங்களிலும் வகைக் கெழு காணின்

$$\frac{du}{dx} = v\,\frac{dy}{dx} + y\,\frac{dv}{dx}\,.$$

$$\therefore \quad v\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - y\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{du}{dx} - \frac{u}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{v\cdot\frac{du}{dx} - u\frac{du}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{du}{dx}}{v^2}$$

பயிற்சிகள் 3.

1. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3x-2}\right) = \frac{(3x-2)\frac{d}{dx}(x^3) - x^3\frac{d}{dx}(3x-2)}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{(3x-2)\;3x^2 - x^3.3}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{6x^3 - 6x^2}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{6x^2(x-1)}{(3x-2)^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{2x+3}\right) = \frac{(2x+3)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\frac{d}{dx}(2x+3)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{(2x+3)\;{}^{1/2}x^{-1/2} - x^{1/2}2}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{(2x+3) - 4x}{2x^{1/2}(x+3)^2}$$

$$= \frac{3-2x}{2\sqrt{x}(2x+3)^2}$$

3. $$\frac{u}{dx}\left(\frac{\log x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x \frac{d}{dx}(\log x) - \log x \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{x} - \log x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x - x \log x \cos x}{x \sin^2 x}$$

32. tan x, cot x, cosec x, sec x என்பவற்றின் வகைக் கெழுக்கள்

$$= \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x . \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x.$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(1) - 1.\ \frac{d}{dx}(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos a \times 0 - (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \tan x \sec x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{cosec}\, x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(1) - 1.\ \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x \times 0 \times -1 \times \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\cot x \text{ cosec } x$$

பயிற்சிகள் 4.

பின்வருவனவற்றிற்கு $\frac{dy}{dx}$ காண்க:

1. $y = (x - 1)(3x - 1)$
2. $y = (7x - 3)(3x^2 + 0)$
3. $y = (1 + x^2)(1 - 2x^2)$
4. $y = \cos x \log x$
5. $y = x^2 \sin x$
6. $y = 2x \cos x - x^2 \sin x$
7. $y = 8\sqrt{x} \log x$
8. $y = (2x - 1)(3x + 7)(4x^2 - 3)$
9. $y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$
10. $y = \frac{\cos x}{x^2}$

11. $y = \dfrac{\sin x}{x}$

12. $y = \dfrac{\log x}{e^x + 1}$

13. $y = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$

14. $y = \dfrac{3 \operatorname{cosec} x + 2}{7 + 3 \cot x}$

15. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \tan x}$

16. $y = \dfrac{3 + 2 \tan x}{4x - 9}$

17. $y = \dfrac{(x + 3)(x - 2)}{(x - 3)(x + 2)}$

18. $y = \dfrac{\tan x}{x}$

19. $y = \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 1)(x + 2)}$

20. $y = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

21. $y = \dfrac{x^4 - 6 + x^{-1}}{2x - 1 + x^{-2}}$

22. $y = \dfrac{e^x + \sin x}{\sec x - x^7}$

23. $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$

24. $y = \dfrac{\log x + 2e^x}{1 + \sec x}$

25. $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 6}{x^2 + 2x + 3}$

33. சார்பின் சார்பினது வகைக்கெழு

சார்பின் சார்பு (Function of a function)

x-ன் சார்பாக u வும், u-ன் சார்பாக y-ம் (அஃதாவது $u = f(x)$, $y = \phi(x)$ இருப்பின், y, x-ன் சார்பின் சார்பு என்று சொல்லப்படும்.

(எ-டு.) : (1) $y = (x^2 - 4x + 8)^{1/3}$

$x^2 - 4x + 8 = u$ என்று கொள்ளின்

$y = u^{1/3}$ இங்கு $u = x - 4x + 8$

ஆகவே, x-ன் சார்பான x-ன் சார்பு y ஆகும்.

அதனல் y, x-ன் சார்பின் சார்பு.

(2) $y = \sin(3x^2 + 4)$ என்பதைப் பார்ப்போம். $3x^2 + 4 = u$ எனக் கொள்ளின், $y = \sin u$. இங்கு $u = 3x^2 + 4$. ஆகவே, y, x-ன் சார்பின் சார்பு.

(3) $y = \sin^3(5x + 6)$ என்பதைக் காண்போம், $u = 5x + 6$. $v = \sin(5x + 6)$ எனக் கொள்ளின்

$y = v^3$. இங்கு $v = \sin u$ $u = 5x + 6$. இது போலும் வேறு எடுத்துக்காட்டுகள் $\log(\sin x)$, $\sin(e^x)$......முதலியவை.

$y = \sin(x^2)$ என்பதைக் காண்போம். வரையறையில் நின்று இச் சார்பின் வகைக்கெழு காண்பது முன் கண்ட சார்புகளைப் போல் அவ்வளவு எளிதன்று. ஆனால், இங்கு, xஐ u என்று கொண்டால் $y = \sin u$. பின்னர் இதன் வகைக்கெழு காண்பது எளிது. இம் முறை எங்ஙனம் என்று பார்ப்போம்.

x-ன் சார்பின் சார்பு y என்று கொள்வோம். அஃதாவது $y = f(u)$, $u = \phi(x)$

x-ன் கூடுந்தொகை Δx ஆகின், u-ன் கூடுந்தொகை Δu என்றும், இதனால் y-ல் ஏற்படும் கூடுந்தொகை Δy என்றும் கொள்வோம். ஆகவே, சுன்னத்தை Δx நோக்குங்கால் சுன்னத்தை Δv Δy நோக்கும்.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} .$$

சுன்னத்தை Δx நெருங்கும்பொழுது இரண்டு பக்கமும் எல்லை எடுப்போம்.

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname*{Lt}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} .$$

$$= \operatorname*{Lt}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \operatorname*{Lt}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \operatorname*{Lt}_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \operatorname*{Lt}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ஆகவே, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dv}$

$y = \sin(x^2)$-ன் வகைக்கெழு காண, $y = \sin u$, $u = x^2$ என்று கொண்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{dv}$$

$$= \frac{d}{du}\left(\sin u\right) \frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$= \cos u . \;\; 2x$$

$$= 2x . \cos x^2 .$$

கிளைத் தேற்றம் : சார்புகளின் எண்ணிக்கை எத்துணையாக இருப்பினும் இம் முறையைக் கையாளலாம்.

$y = f(u)$, $u = F(v)$, $= \phi(x)$ என்று கொள்ளின்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

பயிற்சிகள்

1. $x = (2x^2+4)^3$ என்பதற்கு வகைக்கெழு காண வேண்டும் எனக் கொள்வோம்.

$5x^2 + 4$ஐ u என்று கொள்ளின் $y = u^3$. இங்கு $u = 2x^2 + 4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^2 . \frac{d}{dx}\left(2x^2 + 4\right)$$

$$= 3 . (2x^2 + 4)^2 \quad 4x$$
$$= 12x\,(2x^2+4)^2.$$

2. $y = \sin(ax + b)$
$y = \sin u$ இங்கு $u = ax + b$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u, a$$
$$= a \cos(ax + b).$$

3. $y = \cos^3 x$ என்பதின் வகைக்கெழு காண்பதற்கு $\cos x = u$ என்று கொண்டால் $y = u^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= 3u^2 . (-\sin x)$$
$$= -3 \sin x \cos^2 x.$$

4. $y = \frac{1}{\sqrt{3 + 2x}}$ எனின் $y = \frac{1.}{\sqrt{v}}$ · இங்கு $u = 3 + 2x.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\frac{1}{2} u^{-\frac{2}{3}} 2$$

$$= -\frac{1}{(3+2x)^{3/2}}$$

பயிற்சிகள் 5.

பின்வருவனவற்றிற்கு வகைக்கெழு காண்க :

1. $(x+a)^m (x+b)^n$
2. $\sin (a + bx^n)$
3. $(2x+1)^3 (x^2-1)^4$
4. $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^n$
5. $(1-x)\sqrt{1-x}$
6. $\sqrt{ax^2+bx+c}$
7. $(ax^2+bx+c)^n$
8. $x(a-x)^n$
9. $\frac{x}{\sqrt{2x-1}}$
10. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
11. $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-1}}$
12. $\sqrt{a+bx^2}$
13. $\cos^3 3x \tan 5x$
14. $\cos (\log x)$
15. $\sin^2 2x$
16. $(3x+5)^4 \sqrt{x^3-1}$
17. $\frac{(a-x)^n}{(b-x)^m}$
18. $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$
19. $\sqrt{1+\sin x}$
20. $\tan (e^x)$
21. $\sin^m x \cos^n x$
22. $\sin mx \cos nx$
23. $\sin (\cos x)$
24. $\sin (e^x \log x)$
25. $\tan^2 x$
26. $\log (\cos x)$
27. $\log \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$
28. $\log \frac{1+\cos x}{-\cos x}$
29. $\log \frac{b+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}$
30. $e^{-x} (\sin x + 2\cos x)$

34. எதிர்மாறான சார்புகளின் வகைக்கெழு காணல் (Differentiation of inverse functions)

x-ன் கூடுந்தொகை Δx ஆக இருப்பின், y-ன் கூடுந்தொகை Δy என்று கொள்வோம்.

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

Δx, Δy என்பவை 0ஐ நோக்கும்பொழுது

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

சார்பின் சார்பினது வகைக்கெழுவினாலும் இதனைக் காணலாம்.

$y = f(u)$; $u = \phi(x)$ என்று கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} .$$

y-க்குப் பதில் x என்று கொண்டால்,

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dx} .$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}}$$

35. $\sin^{-1} x$-ன் வகைக்கெழு

$\sin^{-1} x = y$ என்று கொண்டால் $x = \sin y$

இரு பக்கங்களின் xஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு காண்டல்

$$1 = \frac{d}{dx} (\sin y)$$

$$= \frac{d}{dy} (\sin y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \cos y \cdot \frac{dy}{dx} .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

பிறிதொரு முறை : $\quad x = \sin y$

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

36. $\cos^{-1}x$-ன் வகைக் கெழு

$\cos^{-1} x = y$ என்று கொண்டால் $x = \cos y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin v}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

37. $\tan^{-1} x$-ன் வகைக் கெழு.

$\tan^{-1} x = y$ என்று கொண்டால் $x = \tan y$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

ஆகவே, $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

38. $\sec^{-1} x$-ன் வகைக் கெழு.

$\sec^{-1} x = y$ என்று கொண்டால், $x = \sec y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec y \tan y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

இது போன்றே,

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\text{cosec}^{-1}x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$ என்றும் நிறுவலாம்.

பயிற்சி 1

$\sin^{-1}\sqrt{x}$-ன் வகைக் கெழு காண்க.

$y = \sin^{-1}\sqrt{x}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

பயிற்சி 2

$(1+x^2)\tan^{-1}x$-ன் வகைக் கெழு என்ன ?

$y = (1+x)\tan^{-1}x$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = \left(1+x\right)\frac{d}{dx}\left(\tan^{+1}x\right) + \tan^{-1}x\,\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)$$

$$= (1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1}x \cdot 2x$$

$$= 1 + 2x\tan^{-1}x$$

பயிற்சி 3

$\log\sec^{-1}(x^4)$-ன் வகைக் கெழு காண்க.

$y = \log\sec^{-1}(^4)$ எனக் கொள்வோம்

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^{-1}(x^4)}\frac{d}{dx}\cdot\left(\sec^{-1}x^4\right)$$

$$= \frac{1}{\sec^{-1}(x^4)} \cdot \frac{1}{x^4\sqrt{x^8-1}}\frac{d}{dx}(x^4)$$

$$= \frac{1}{\sec^{-1}(x^4)} \cdot \frac{1}{x^4\sqrt{x^8-1}} \cdot 4x^3.$$

$$= \frac{4}{x\cdot\sec^{-1}(x^4)\sqrt{x^8-1}}$$

பயிற்சிகள் 6.

கீழ்க்கண்ட சார்புகளுக்கு வகைக்கெழு காண்க:

1. $\tan^{-1}(\sqrt{x})$
2. $\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{3}\right)$
3. $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $(\cos^{-1} x)^2$
5. $x \cos^{-1} x$
6. $x \tan^{-1} x$.
7. $\cos^{-1}\sqrt{3x-2}$
8. $\log \sin^{-1}(e^{2x})$
9. $\sqrt{1-x^2}\ \sin^{-1} x$.
10. $\sqrt{\tan^{-1}(e^x)}$
11. $\sin^{-1}(\sin x)$
12. $\tan^{-1}(e^{2x+1})$
13. $\sin^{-1}(1+x^2)^{-1/2}$
14. $\tan^{-1}(x)$
15. $\sin^{-1}\left(\frac{b+a\sin x}{a+b\sin x}\right)$
16. $\tan^{-1}(\log x)$
17. $\cos^{-1}\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\sin x}\right)$
18. $\cos^{-1}(1-2x^2)$
19. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$
20. $\cot^{-1}(\operatorname{cosec} x)$
21. $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{x}\right)$
22. $\sin\left(\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)$
23. $\sin^{-1}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$
24. $\tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{x-a}}$
25. $\frac{x\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

39. கந்தழிச் சார்புகள் (Hyperbolic functions)

$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ என்ற கோவைகள் முறையே கந்தழி நெடுக்கை (hyperbolic sine), கந்தழி இடக்கை (hyperbolic cosine) எனக் கூறப்படும். இவற்றிற்குப் பின்வருவன குறியீடுகளாகும்.

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

இவ் வரையறைகளால் அடியிற்கண்ட வாய்பாடுகளை எளிதிற் காணலாம்.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x \;=\; \frac{1}{4}\;\{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2\}$

$= \frac{1}{4}\;(e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2^{-}e^{-2x})=1$

(2) $2\sinh x\cosh x \;=\; 2\cdot\frac{1}{4}\,(e^x-\epsilon^{-x})\,(e^x+e^x)$

$= \frac{1}{2}\,(e^{2x}-e^{-2x})$

$= \sinh 2\,x.$

(3) $\cosh^2 x+\sinh^2 x \;=\; \frac{1}{4}\;\{(e^x+e^{-x})^4+(e^x-e^{-x})^2\}$

$= \frac{1}{4}\,(e^{2x}+2+e^{-2x}+e^{2x}-2+e^{-2x})$

$= \frac{1}{2}\,(e^{2x}+e^{-2x})$

$= \cosh 2\,x.$

40. எதிர்மறைக் கந்தழிச் சார்புகள் (Inverse hyperbolic functions).

(1) $y=\sinh^{-1}x$ எனின், $x=\sinh y$.

ஆகவே. $\frac{1}{2}\,(e^y-x^{-y}) = x$

$e^{2y}-1 = 2xe^y$

$\therefore\quad e^{2y}-2x\,e^y+x^2 = x^2+1$

$e^y-x=\pm\sqrt{x+1}$

e^y மிகை எண்ணுதலின் மிகைக் குறி கொள்ளப்படும்.

$e^y = x+\sqrt{x^2+1}$

$\therefore\quad y = \log e\,(x+\sqrt{x^2+1})$

(2) $y=\cosh^{-1}x$ எனின், $\cosh y = x$

$\frac{1}{2}\,(e^y+e^{-y}) = x.$

(அ-து.) $e^{2y}+1 = 2xe$

(அ-து.) $e^{2y}-2xe^y+x^2 = x^2-1$

(அ-து.) $e^y-x = +\sqrt{x^2-1}$

e^y மிகை எண்ணுதலின் $e^y = x+\sqrt{c^2-1}$

$\therefore\quad y = \log_e\,(x+\sqrt{x^2-1})$

(8) $y = \tanh^{-1} x$ எனின் $x = \tanh = y$

$$\therefore \quad \frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}} = x$$

ஆகவே, $e^{y}-e^{-y} = xe^{y}+xe^{-y}$

$$e^{y}(1-x) = e^{-y}(1+x)$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\therefore \quad y = \tfrac{1}{2} \log_e \frac{1+x}{1-x}$$

41. **கந்தழிச் சார்புகளின் வகைக்கெழு**

(1) $y = \sinh x$ எனின் $\frac{dy}{dy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)$

$$= \tfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

$$= \cosh x.$$

(2) $y = \cosh x$ எனின் $\frac{dy}{dy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)$

(3) $y = \tanh x$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)$

$$= \frac{\cosh x.\frac{d}{dx}(\sinh x)-\sinh x\ \frac{d}{dx}(\cosh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$= \text{sech}^2 x.$$

இம்முறையே $y = \cosh x$ எனின் $\frac{dy}{dx} = -\text{cosech}^2 x$

$y = \text{sech}\, x$ எனின் $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x}$

$y = \text{cosech}\, x$ எனின் $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x}$

42. எதிர்மறைக் கந்தழிச் சார்புகளின் வகைக்கெழு

(1) $y = \sinh^{-1} x$ எனின் $\sinh y = x$

$$\text{ஆகவே, } \frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$= \sqrt{x + \sinh^2 y}$$

$$= \sqrt{1 + x^2}$$

$$\text{ஆகவே, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$$

(2) $y = \cosh^{1} x$ எனின் $x \cosh y$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1}$$

$$= \sqrt{x^{2-1}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^{2-1}}}$$

(3) $y = \tanh^{-1} x$ எனின் $x = \tanh y$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 y$$

$$= 1 - \tanh^2 y$$

$$= 1 - x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}$$

43. மடக்கை எடுத்து வகைக்கெழு காணுதல் (Logarithmic differentiation)

சில சினைகள் அடங்கிய சார்பொன்றின் வகைக்கெழு காண, அதன் மடக்கை எடுத்துப் பின்னர் வகைக்கெழு காணுதலும் ஒரு வழியாகும்.

பயிற்சி 1.

$$\frac{(a-x)\,(b-x)^3}{(c-2x)^3}$$ -ன் வகைக்கெழு காண்க.

$$y=\frac{(a-x)^2\,(b-x)^3}{(c-x)^3}$$ எனக் கொள்வோம்.

இரண்டு பக்கங்களிலும் மடக்கை எடுப்பின்,

$$2\log y=\log(a-x)+3\log(b-x)-3\log(c-2)$$

x ஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு எடுப்பின்,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{a-x}-\frac{3}{b-x}+\frac{6}{c-2x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y\left(-\frac{2}{a-x}-\frac{3}{b-x}+\frac{6}{c-2x}\right)$$

$$=\frac{(a-x)^2(b-x)^2}{(c-2x)^3}\left(-\frac{2}{a-x}-\frac{3}{b-x}-\frac{6}{c-2x}\right)$$

பயிற்சி 2.

$e^{ax}\cos^3 x\sin^2 x$-ன் வகைக்கெழு என்ன?

$y=e^{ax}\cos^3 x\sin^2 x$ எனக் கொள்வோம்.

$\log y=ax+3\log\cos x+2\log\sin x$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=a-3\tan x+2\cot x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=e^{ax}\cos^3 x\sin^2 x\,(a-3\tan x+2\cot x)$$

வகைக்கெழு காணும் கோவையில் x அடங்கியபடி உள்ள உறுப்புகள் இருப்பின், மடக்கை எடுத்துப் பின்னர் வகைக்கெழு காண்டல் நன்று.

பயிற்சி 3.

$y=(\sin x)^x$ எனக்கொள்வோம்,

இரு பக்கமும் மடக்கை எடுப்பின்,

$\log y=x\log(\sin x)$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}=\log(\sin x)+x\cot x.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(\sin x)^x\left\{\log(\sin x)+x\cot x\right\}$$

பயிற்சி 2.

$y=a^x$ எனின் $\log y=x\log_e{}^a$

$$\therefore \frac{x}{y}\ \frac{dy}{dx}=\log_e{}^a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=a^x\log_e{}^a$$

பயிற்சி 3.

$y=7^{x^2+2x}$ எனின், $\log y=(x^2+2x)\log 7$

$$\therefore \frac{x}{y}\ \frac{dy}{dx}=(2x+2)\log_e 7$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2.\ 7^{x^2+2x}(x+1).\log 7$$

பயிற்சி 4.

அடியிற் காணும் சார்புகளுக்கு வகைக்கெழு காண்க:

1. $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1+x^2}}$.
2. $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x$.
3. $\dfrac{x}{(a^2-x^2)^{3/2}}$
4. $\dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{4x^2-7}}$
5. x^x.
6. $\dfrac{2x}{(1+x)^{1/2}(1-x^2)^{3/2}}$
7. $x\cdot x\sin x$.
8. $\dfrac{x^2\tan^{-1}x}{\sqrt{1+x^2}}$.
9. $x^{5+\sin x}$.
10. $\sin x.\log x.\ e^x\ (a^2-x^2)^{3x+7}$.
11. $\dfrac{x^3\sqrt{2+3x}}{(2+x)(1-x)}$
12. $(\log x)^x$.
13. $e^{-x}\sin^n x\cos^m x$.
14. $(\tan x)\log x$.

15. 10^{3x-1}.

16. $(\log x)^{\sin x}$.

17. $\sqrt[3]{\frac{x^3(x^2-1)}{(2-3x)^5}}$.

18. $(ax+b)^{cx+d}$.

19. $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(2x-1^2)(4x+3)^4}}$.

20. $\frac{\cos^m x . \sin^n x}{\cosh^2 x}$

44. உருமாற்றங்கள் (Transformations)

சார்புகளின் வகைக்கெழு காண, இயற்கணித உரு மாற்றங்களையோ, கோண கணித உருமாற்றங்களையோ பயன்படுத்துவதுண்டு.

பயிற்சி 1.

$\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ -ன் வகைக்கெழு காண்க.

$y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ -ன் வகைக்கெழு காண்க.

$y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{1}{\frac{4x^2}{1+(1+x^2)^2}} \frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-x^2)^2}{(1+x)^2} \cdot \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2}{1+a^2}.$$

இவ்வாறின்றி $x = \tan\theta$ எனக் கொளின்

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta$$

ஆகவே, $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1} (\tan 2\theta)$

$$= 2\theta$$

$$= 2 \tan^{-1} x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

பயிற்சி 2.

$$y = \tan^{-1} \frac{a-x}{1+ax}$$

$a = \tan \alpha$ என்றும், $x = \tan \theta$ என்றும் கொள்வோமாயின்

$$y = \tan^{-1} \frac{\tan \alpha - \tan\theta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \theta}$$

$$\left\{ \tan (\alpha - \theta) \right\}$$

$$= \alpha - \theta$$

$$= \alpha - \tan^{-1} x.$$

a ஒரு மாறு எண்ணாதலின் α-ம் ஒரு மாறு எண்ணாகும்.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{1+x^2}$$

பயிற்சி 3.

$$y = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$x = \tan \theta$ என்று கொண்டால்,

$$y = \cos^{-1} \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta}$$

$$= \cos^{-1} (\cos 2\theta)$$

$$= 2\theta$$

$$= 2 \tan^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}.$$

பயிற்சி 4.

அடியில் வரும் சார்புகளுக்கு வகைக் கெழு காண்க :

1. $\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$
2. $\sin^{-1}(3x - 4x^3)$
3. $\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{1 + x}{2}}$
4. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x^2}{a - x^2}}$
5. $\tan^{-1}\left(\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right)^{1/2}$
6. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$
7. $\tan^{-1}\dfrac{3a^2x - x^3}{a(x^3 - 3x)}$
8. $\tan^{-1}(\sqrt{1 + x} - x)$
9. $\sin^{-1}(2x\sqrt{1 - x^2})$
10. $\sec\left(\dfrac{1}{1 - 2x^2}\right)$
11. $\sin\left(\dfrac{2x}{1 + x^2}\right)$
12. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$
13. $\dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$.
14. $\sqrt{c^2 - x^2} + \dfrac{c}{2}\log\dfrac{c - \sqrt{c^2 - x^2}}{c + \sqrt{c^2 + x^2}}$
15. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}$

45. உட்படு சார்புகளின் வகைக்கெழு காணுதல்

வெளிப்படு சார்புகளின் வகைக்கெழு காணும் முறை இது காறும் விரித்துரைக்கப்பட்டது. உட்படு சார்புகளை விடுவித்து $y = f(x)$ என்று சிற்சில இடங்களிலேதான் எழுதுதல் இயலும். $F(x, y) = 0$ என்னும் உட்படு சார்பின் வகைக்கெழு காண்பதற்குச் சமன்பாட்டின் வகைக்கெழு காண்க. (அஃதாவது அதன் ஒவ்வோர் உறுப்பின் வகைக்கெழுவின் கூட்டுத் தொகை.) கண்டால், y-ன் வகைக்கெழு அடங்கிய ஓரினச் சமன்பாடு (simple equation) ஒன்று வரும். இச் சமன்பாட்டினை விடுவித்தால் $\dfrac{dy}{dx}$ காணலாம்.

பயிற்சி 1

x, y என்பவற்றின் தொடர்பு $ax^2 + 2xhy + by^2 = c$ எனின், $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

இச் சமன்பாட்டின் வகைக்கெழு கண்டால்,

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + \frac{d}{dx}(2hxy) + \frac{d}{dx}(by^2) = \frac{d}{dx}(c)$$

$$2ax + 2h(x\frac{dy}{dx} + y) + 2by\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore (hx + by)\frac{dy}{dx} + (ax + hy) = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy}{hy + by}$$

பயிற்சி 2.

x, y என்பவற்றின் சார்புத் தொடர்பு

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$ எனின், $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு என்ன ?

$$\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{2}y^{-1/2}}$$

$$= -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

பயிற்சி 3.

$\sin y = x\sin(k + y)$ எனின், $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(k + y)}{\sin k}$ என்று

நிறுவுக:

$\sin y = x\sin(k + y)$ வகைக்கெழு காணின்,

$$\cos y\frac{dy}{dx} = \sin(k + y) + x\cos(k + y)\frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{dy}{dx}\left\{\cos y - x\cos(k+y)\right\} = \sin(k+y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(k+y)}{\cos y - x\cos(k+h)}$$

நிறுவ வேண்டும். விடையில் x இன்மையால் அதற்கு அதன் மதிப்பையே முந்திய சமன்பாட்டில் ஈடு கொடுத்தல் வேண்டும்.

$$x = \frac{\sin y}{\sin(k+y)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(k+y)}{\cos y - \frac{\sin y}{\sin(k+y} \cdot \cos(k+y)}$$

$$= \frac{\sin^2(k+y)}{\sin(k+y)\cos y - \sin y\cos(k+y)}$$

$$= \frac{\sin^2(k+y)}{\sin k}$$

பயிற்சி 4.

$$y = \sqrt{\left[\sin x + \sqrt{\left\{\sin x + \sqrt{(\sin x + \ldots \infty}\right.}\right]}$$

எனின், $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = \sqrt{\sin x + y}$$

$$\therefore y^2 = \sin x + y$$

இச் சமன்பாட்டின் வகைக்கெழு கண்டால்

$$2y\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$$

பயிற்சி 5.

$x(1+y)^{1/2} + y(1+x)^{1/2} = 0$ எனின்,

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ என்று நிறுவுக.

$$x(1+y)^{\frac{1}{2}} = -(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

இரு பக்கத்தினுடைய இருபடி கண்டால்

$$x(1+y) = y(1+x)$$

(அ-து.) $x^2 - y^2 + x^2 y - y^2 x = 0$

(அ-து.) $(x - y)(x + y + xy) = 0$

$\therefore x = y$ அல்லது $x + y + xy = 0$

சமன்பாட்டில் $x = y$ என்று கொண்டால்

$$2x(1+x)^{1/2} = 0$$

ஆகவே, $x = 0$ அல்லது $x = -1$. இதற்கு எதிர் நிலையாக $y = 0$ அல்லது 1 என்று வரும்.

ஆகவே, x, y என்பவற்றிற்குச் சிறப்பான மதிப்புகள் வருவதால் $x = y$ என்பதைப் பொருட்படுத்த வேண்டாம்.

ஆகவே, $x + y + xy = 0$

இதன் வகைக்கெழு காணின்

$$1 + \frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y}{1+x}$$

$$x + y + xy = 0$$

$$y(1+x) = -x$$

$$\therefore y = -\frac{x}{1+x}$$

ஆகவே, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - \frac{x}{1+x}}{1+x}$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2}$$

பயிற்சிகள் 9

x, y என்பவை கீழ்க்காணும் தொடர்புடையனவாக இருக்குங்கால் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

1. $x^3 + y^3 = a^3$
2. $ax^2 + 2hxy + by + 2gx + 2fy + c = 0$
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
4. $xy = c^2$
5. $y^2 = 4ax$
6. $ax^2 + ay^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
7. $x^3 + y^3 = 2axy$
8. $x^m y^n = a^{m+n}$
9. $(x^2 + y)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$
10. $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$
11. $\cos (x + y) + \sin (x - y) = 1$
12. $y^m y^n + x^n y^m = a^{m+n}$
13. $x^4 \; 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4 = a^4$
14. $\sin^2 x - 2 \sin x \cos y + \cos^2 y = 0$
15. $\cos^2 x + \sin^2 y - 2 \cos x \cos y = 0$
16. $y^2 (2a - x) = x^3$
17. $xy^2 = 4a^2 (2a - x)$
18. $27 ay = 4 (x - 2a)^3$
19. $(x + y + 1)^4 = (1 - x)^5$
20. $x^5 + y^5 = 5a x^2 y^2$
21. $y = x^{x^{\cdots\infty}}$ எனின், $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y \log x}$ என்று நிறுவுக.
22. $x^y = e^{x-y}$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$ என்று நிறுவுக.

23. If $y = \cfrac{\sin x}{1+\cfrac{\cos x}{1+\cfrac{\sin x}{1+\cfrac{\cos x}{1+\ldots\ldots\infty}}}}$

என்றால், $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+y)\cos x + y \sin x}{1+2y+\cos x - \sin x}$ என்று நிறுவுக.

24. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a\,(x-y)$ எனின்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$ என்று நிறுவுக.

16. x, y என்பவை சிலவிடத்து வேறொரு மாறியின் சார்பாகவும் கொடுத்தல் உண்டு. அம் மாறியை நீக்கினால் x, y அடங்கிய ஓர் உட்படு சார்பு பெறலாம். அதன் வழி $\dfrac{dy}{dx}$ காணலாம், அந்த மாறியை அகற்றாமல் அடியிற் கண்டவாறும் $\dfrac{dy}{dx}$ காணலாம்.

$x = f(\theta), y = \Psi(\theta)$ எனக் கொள்வோம்.

θ-வின் கூடுந்தொகை $\Delta\theta$ ஆயின், x y என்பவற்றின் கூடுந்தொகைகள் Δx, Δy என்று கொள்வோம். சுன்னத்தை $\Delta\theta$ நெருங்குங்கால் சுன்னத்தை Δx, Δy நெருங்கும்.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta\theta} \div \frac{\Delta x}{\Delta\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta\theta} \div \frac{\Delta x}{\Delta\theta}$$

$$= \underset{\Delta\theta \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta\theta} \div \underset{\Delta\theta \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta x}{\Delta\theta}$$

$$= \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta}$$

பயிற்சி

$x = at^2$, $y = 2at$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$\frac{dx}{dt} = 2at$, $\frac{dy}{dt} = a$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dy}{dt} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

பயிற்சி 2.

$x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ எனின், $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1 - \cos\theta)} = \cot\theta/2$$

பயிற்சிகள் 10

பின்வருவனவற்றில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க :

1. $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$
2. $x = a\cos^3\theta$, $y = b\sin^3\theta$
3. $x = ct.$, $y = \frac{c}{t}$
4. $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$
5. $x = a\cosh\theta = b\sinh\theta$
6. $x = 2\sin t$, $y = \cos 2t$
7. $x = a(\cos t + \log\tan t/2,)$ $y = a\sin t$
8. $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$
9. $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$
10. $x = a(2\cos\theta + \cos 2\theta)$, $y = a(2\sin\theta + \sin 2\theta)$
11. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$
12. $x = a\sin 2\theta(1 + \cos 2\theta)$,
    $x = a\cos 2\theta(1 - \cos 2\theta)$

சார்பைப் பொறுத்த ஒரு சார்பின் வகைக்கெழு (Differentiation of one function with respect to another)

(x)ஐப் பொறுத்த $f(x)$-ன் சார்பினைக் காணும் முறை

$$\frac{d.\ f(x)}{d.\ \phi(x)} = \frac{d\,f(x)}{dz} \text{ இங்கு } z = \phi(x)$$

$$= \frac{d.\ f(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$$

$$= \frac{d.\ f(x)}{dx} \div \frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{d.\ f(x)}{dx} \div \frac{d\,\phi(x)}{dx}$$

பயிற்சி 1.

$\sin^{-1} x$ஐப் பொறுத்த $e \sin^{-1} x$-ன் வகைக்கெழு என்ன?

$$\frac{d\ (e \sin^{-1} x)}{d\ (\sin^{-1} x)} = \frac{d\ (e \sin^{-1} x)}{dx} \div \frac{d\,(\sin^{-1} x)}{dx}$$

$$= e \sin^{-1} x \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \div \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= e \sin^{-1} x$$

பயிற்சி 2.

$\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$ ஐப் பொறுத்த $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$-ன் வகைக் கெழு காண்க.

$$\frac{d \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)}{dx} = \frac{2}{1+x^2} \quad (x = \tan\theta \text{ என்று கொள்க})$$

$$\frac{d.\left(\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}\right)}{dx} = \frac{2}{1+x^2} \quad (x = \tan\theta/2 \text{ என்று கொள்க})$$

$$\therefore \frac{d\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)}{d\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\right)} = \frac{d\left(\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)}{dx} \div \frac{d\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\right)}{dx}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \div \frac{2}{1+x^2}$$

$$= 1$$

பயிற்சிகள் 11.

வகைக்கெழு கண்டு பயில்வதற்கு ஏற்ற கணக்குகள் வருமாறு :

1. $\dfrac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\cot \log (x^6+3)$
3. $\dfrac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
4. $x \sec x$
5. $e^{\sin^{-1} x}$
6. $\log \tan \left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$
7. $\log(2+3x-4x^2)$
8. $e^x \sin^2 x.$
9. $\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}} \sin^{-1} \dfrac{3x-1}{5}$
10. $e^{-2x} \sin 3x$
11. $\sin^{-1} \dfrac{2x^2}{1+x^2}$
12. $x\sqrt{a+bx}.$
13. $\log(x+\sqrt{1+x^2})$
14. $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$
15. $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}$
16. $\dfrac{e^x}{1+x}$
17. $e^{kx} \cos x$
18. $\dfrac{1}{1+\cos x}$
19. $\log \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$
20. $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$
21. $\dfrac{x+2}{(x-1)(x+3)}$
22. $\dfrac{(1-x)^{4/5}}{(3x+2)^{1/2}}$
23. $e^{\cos x}$
24. $(x+2)(5x^2+9)$
25. $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$
26. $\log \cos x$

27. $\frac{e^x}{x\sqrt{e^x+1}}$

28. $x(x+3)(x^2+9)$

29. $\sin^2(4x+1)$

30. $e^{3x}\sin 4x$

31. $\sin(\sqrt{x})$

32. $\frac{(x-1)^2(3x+1)}{(x^2-1)^{1/2}(x+1)}$

33. $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

34. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

35. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

36. $e^{3x}\cos(2x+5)$

37. $\log(\sec x+\tan x)$

38. $\frac{7x-1}{1-5x+6x^2}$

39. $x\sin(xe^x)$

40. $\frac{e^{\sin x}}{\sin(x^n)}$

41. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

42. $a^{\log\tan x}$

43. $\log\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$

44. $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

45. $\frac{(x-1)^2}{(x-2)^{1/2}(2x-3)^{1/4}}$

46. $\frac{x^2(5+x)^2}{(3+x)^5}$

47. $\tan^{-1}\frac{x\cos a}{1+x\cos a}$

48. $\frac{(x^2-1)^{1/2}x^{2/3}}{(ax+b)}$

49. $(a^2+x^2)^x$

50. $\log(\tan 2x)$

51. $(x^2+4)^x$

52. $(x^2+1)^{\tan x}$

53. $x^{\sqrt{x}}$

54. $4^x\log(\sec x^2)$

55. $\sin^{-1}(2x^2-1)$

56. $x^{\sin x}$

57. $(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\sin^{-1}(x-1)$

58. $\log_{10}\sin x$

59. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

60. $(\log x)^{\tan x}$

61. $(ax^2+bx+c)^{\cos x}$

62. $(a^2-x)^{2x}$

63. $\sin^2\left[\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right]$

64. $\sin^{-1}(2x+1)\sqrt{2-x^2}$

65. $\left[\tan^{-1}(x^2+1)\right]^{\cos x}$

66. $\frac{1}{(ax+b)\ \sqrt[3]{(cx+d)^2}}$

67. $(x^2+4)^x$

67. $\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$

68. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x+x^2}}$

70. $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})^{-n}$

71. $\sin^{-1}\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$

72. $(x+2)\sqrt{x^2+4x}$

73. $x^{\sin^{-1}x}$

74. $\tan^{-1}(\sin e^x)$

75. $\log(2x+\sqrt{4x^2+9})$

76. $(1+\log x)^{x^2}$

77. $\tan^{-1}(2x+5)$

78. $\log\left(a+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

79. $e^{x^{\sec x}}$

80. $(b^2-x^2)^{3x}$

81. $\log_a(\tan 2x)$

82. $e^x\sin^{-1}(2x)$

83. $\sqrt{\frac{x(3x+1)^2}{(x^2+5)^3}}$

84. $x^x+\sin(\log x)$

85. $\sin^{-1}\frac{x^3+x+4}{(x-4)^3}$

86. $(\sin x)^{\cos x}$

87. $\frac{(x+2)^2\sin x}{\sqrt{2x-1}}$

88. $\frac{e^{x^5}}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

89. $\frac{x\log x-x}{\sin x}$

90. $\tan^{-1}\frac{3x-x^2}{1-3x^2}$

91. $\frac{\cosh 2x}{x^3}$

92. $\tan^{-1}\sqrt{1+x}$.

93. $\cos x$ ஐப் பொறுத்த $e^{\sin x}$ -ன் வகைக்கெழு காண்க.

94. $\sqrt{1-x^2}$ ஐப் பொறுத்த $\sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ -ன் வகைக்கெழு காண்க.

95. x ஐப் பொறுத்த $\log_{10}x$-ன் வகைக்கெழு காண்க.

96. $\sec^{-1}\frac{1}{2x^2-1}$ ஐப் பொறுத்த $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ -ன் வகைக்கெழு காண்க.

97. t^2 ஐப் பொறுத்த $e^{\sqrt{t}}$ -ன் வகைக்கெழு காண்க.

98. $2na=\pi$ எனின்

$\sin\theta, \sin(2a+\theta), \sin(4a+\theta)......$

$$\sin\left\{2(n-1)a+\theta\right\} = \frac{\sin n\theta}{2^{n-1}}$$

இதனால்,

(1) $\cot\theta+\cot(2a+\theta)+........\cot\left\{2(n-1)a+\theta\right\}$

$$=n\cot n\theta.$$

(2) $\operatorname{cosec}^2\theta+\operatorname{cosec}^2(2a+\theta)+......+$

$\operatorname{cosec}^2\left\{2\overline{(n-1)}a+\theta\right\}=n^2\operatorname{cosec}^2 n\theta$

என்று நிறுவுக.

99. $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{3^2}......\infty=\frac{\sin x}{x}$. இதனைப் பயன்படுத்தி,

(1) $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^3}\tan\frac{x}{2^3}+......\infty$

$$=\frac{1}{x}-\cot x.$$

(2) $\frac{1}{2^2}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2^4}\sec^2\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^6}\sec^2\frac{x}{2^3}+......\infty$

$=\operatorname{cosec}^2 x-\frac{1}{x^2}$ என்று நிறுவுக.

100. ஒன்றைவிட x குறைவாக இருப்பின்,

(1) $\frac{1}{1+x}-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}+......\infty=\frac{1}{1-x}$

(2) $\frac{1-2x}{1-x+x^2}+\frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4}+\frac{4x^3-8x^7}{2-x^4+x^8}+.........\infty$

$=\frac{1+2x}{1+x+x^2}$ என்று நிறுவுக.

3. தொடர் வகைக்கெழு காணுதல்

(Successive differentiation)

48. x அடங்கிய சார்பொன்றின் வகைக்கெழு பெரும்பாலும் x-ன் மற்றொரு சார்பு ஆகும் என்பதனைப் பார்த்தோம். இச் சார்பு முன்னைய சார்பின் முதல் வகைக்கெழு என்று கூறப்படும். இந்தச் சார்பின் வகைக்கெழு, முதல் வகைக்கெழுவின் வகைக்கெழுவாகும். இது முன்னைய சார்பின் இரண்டாம் வகைக்கெழு என்று சொல்லப்படும். இவ்வாறே இரண்டாம் வகைக்கெழுவின் வகைக்கெழு மூன்றாம் வகைக்கெழு எனப் பெயர் பெற்று நடக்கும்.

$y = 4x^5$ எனின், $\frac{dy}{dx} = 20x^4$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 80x^3$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 240x^2$$

இவ் வகைக்கெழுவிற்கு அடியில் வருபவை குறியீடுகளாகும்.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = Dy$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}=D^3y$$

. . . .

. . . .

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^n y}{dx^n}=D^ny$$

$y=f(x)$ எனின், தொடர் வகைக்கெழு பின்வருமாறு எழுதப் படும் :

$f(x), f''(x), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad f^n(x)$

$y', y'', \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y^{(n)}$

அல்லது $y', y'', \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y^n$

49. nஆம் வகைக் கெழு

சில சார்புகளின் n ஆம் வகைக்கெழு காணப் பின்வரும் முறை கையாளப்படும். சார்புகளின் இரண்டாவது அல்லது மூன்றாவது வகைக்கெழுவைக் கண்டு, அவற்றின் அமைப்பு முறையையும் அறிந்து, உய்த்தறிதல முறைப்படி (Method of Induction) n ஆம் வகைக்கெழு எழுதுக.

எடுத்துக்காட்டாக $y=e^{ax}$ எனின்,

$$\frac{dy}{dx}=a\,e^{ax}$$

$$\frac{d^2y}{dx}=a^2\,e^{ax}$$

இதனால் $\frac{d^ny}{dx^n}=a^n\,e^{ax}$ என்று காணலாம்.

50. சில சார்புகளின் nஆம் வகைக் கெழு

1. $y=(ax+b)^m$ எனின்,

$y_1=m.\,a\,(ax+b)^{m-1}$

$y^2=m\,(m-1)\,a^2\,(ax+b)^{m-2}$

$y_3=m\,(m-1)\,(m-2)\,a^3\,(ax+b)^{m-3}$

ஆகவே, $y_n=(m-1)\,(m-2)\,.\,.\,(m-n+1)\,a^n\,(ax+b)^{m-n}$

இங்கு $m=-1$ என்று கொண்டால்,

$D^n\,(ax+b)^{-1}=(-1)^n\,\angle^n\,a^2\,(ax+b)^{n-1}$

2. $y = \log (ax+b)$ எனின்,

$$y_1 = \frac{a}{ax+b} = a.\ (ax+x)^{-1}$$

$$y_2 = (-1)\ a^2\ (ax+b)^{-2}$$

$$y_3 = (-1)\ (-2)\ a^3\ (ax+b)^{-3}$$

பொதுவாக, $y_n = (-1)^{n-1}\ n! - 1 a^n\ (ax+b)^{-n}$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\ (n-1)!\ a^n.}{(ax+b)^n}$$

3. $y = \sin (ax+b)$ எனின்,

$$y_1 = a \cos (ax+b) = a \sin \left(\frac{\pi}{2} + ax+b \right)$$

$$y_2 = a^2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + ax+b \right) = a^2 \sin \left(2.\ \frac{\pi}{2} + ax+b \right)$$

$$y_3 = a^3 \sin \left(3.\ \frac{\pi}{2} + ax+b \right)$$

பொதுவாக $D^n \sin (ax+b) = a^n \sin \left(n.\ \frac{\pi}{2} + ax+b \right)$

(4) இதுபோல $D^n \cos (ax+b) = a^n \cos \left(n.\ \frac{\pi}{2} + ax+b \right)$

(3), (4) -ல் $a=1$, $b=0$ என்று கொண்டால்,

$$D^n (\sin x) = \sin \left(x + \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$D^n (\cos x) = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$$

(5) $y = e^{ax} \sin (bx+c)$ எனின்,

$$y_1 = e^{ax}\ b \cos (bx+c) + ae^{ax} \sin (bx+c)$$

$a = r \cos \phi$, $b = r \sin \phi$ என்று கொண்டால்

$$y_1 = e^{ax}\ r \sin \phi, \cos (bx+c) + r \cos \phi.\ e^{ax} \sin (bx+c)$$

$$= r\ e^{ax} \sin (bx+c+\phi)$$

$$y_2 = r.\ e^{ax}\ b \cos(bx+c+\phi) + r.\ a\ e^{ax} \sin bx+c+\phi)$$

$$= r.\ e^{ax} \left\{ r \sin\phi \cos(bx+c+\phi) + r \cos\phi \sin(bx+c+\phi) \right\}$$

$$= r.\ e^{ax} (\sin bx+c+2\phi)$$

பொதுவாக,

$$I^n \left\{ e^{ax} \sin(bx+c+\phi) \right\} = r^n e^{ax} \sin(bx+c+n\phi)$$

இங்கு $r^2 = a^2 + b^2$, $\tan\phi = \frac{b}{c}$

அஃதாவது $r = (a^2+b)^{1/2}$, $\phi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

(6) இதுபோல,

$$D^n \left\{ e^{ax} \cos(bx+c) \right\} = r^n e^{ax} \cos(bx+c+n\phi)$$

51. $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ போன்ற பின்னங்களின் nஆம் வகைக்கெழு காண, அவற்றைப் பகுதிப் பின்னங்களாக (partial fractions) எழுதி, n தடவை வகைக்கெழு காண்க.

பயிற்சி 1. $y = \frac{3}{(x+1)(2x+1)}$ எனின், y_n என்ன?

பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தால்,

$$y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore\ y_n = \frac{2(-1)^n 2^n n!}{(2x2-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+2}}$$

$$= (-1)^n n!. \left\{ \frac{2^{n+1}}{(2x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right\}$$

பயிற்சி 2.

$$y = \frac{x^2}{(x-1)^2\ (x+2)} \text{ எனின், } y_n \text{ என்க}$$

$$\frac{x^2}{-1^2\ (x+2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1^2} + \frac{C}{(x+2)} \text{ என்க}$$

டால், $A = \frac{5}{9}, B = \frac{1}{3}. C = \frac{4}{9},$ என்று காண்பது எளிது.

$$\therefore\ y = \frac{5}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{4}{9(x+2)}$$

ஆகவே, $y_n = \frac{5\,n!\,(-1^n)}{9(x-1)^{n+1}} + \frac{n!+1\,(-1)^n}{3(x-1)^{n+2}} + \frac{4\,(-1)^n\,n!}{9\,(x+2)^{n+1}}$

$$= (-1)^n n!\ \left\{ \frac{5}{9(x-1)^{n+1}} + \frac{n+1}{3(x-1)^{n+1}} + \frac{4}{9(x+2)^{n+1}} \right\}$$

52. கோண கணித உருமாற்றங்கள்

நெடுக்கை, கிடக்கை என்பவற்றின் படிகள் அடங்கிய பெருக்குத் தொகையைக் கோண கணித வாயிலாகக் கூட்டுத் தொகையாய் எழுதியபின் வகைக்கெழு காண்க.

பயிற்சி 3.

$\cos x . \cos 2x . \cos 3x$-ன் 3ஆம் வகைக்கெழு காண்க.

$$\cos x . \cos 2x . \cos 3x = \tfrac{1}{2} \cos 2x (\cos 4x + \cos 2x)$$
$$= \tfrac{1}{2} \cos 2x \cos 4x + \tfrac{1}{2} \cos^2 2x$$
$$= \tfrac{1}{4} (\cos 2x + \cos 6x) + \tfrac{1}{4} (1 + \cos 4x)$$
$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$$

$\therefore D^n (\cos x . \cos 2x . \cos 3x)$

$$\tfrac{1}{4} \left\{ 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right) + 4^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 4x\right) + 6^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 6x\right) \right\}$$

θ-ன் nஆம் வகைக்கெழு என்ன ?

) + i sin θ என்று கொண்டால்

$$\theta + i \sin \theta)^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$, x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta;\ x - \frac{1}{x} = 2 i \sin\theta$$

அதன் மேலும், டிமாவிசின் (De Moivre's Theorem) தேற்றப்படி

$x^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$; $\frac{1}{x^n} \cos n\theta \; s \; \sin n\theta$. ஆகவே,

$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$; $x^n - \frac{1}{x^n} = 2 i \sin n\theta$.

$$\text{இதனால் } 2^5 \cos^5 \theta = \left(x + \frac{1}{x}\right)^5$$

$$2^7 i^7 \sin^7 \theta = \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

ஆகவே,

$$2^{17} i^7 \cos^4\theta \sin^7\theta = \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^5 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \left(x^{10} - 5x^6 + 10x^2 - \frac{10}{x^2} + \frac{5}{x^6} - \frac{1}{x^{10}}\right) \times$$

$$\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \left(x^{12} - \frac{1}{x^{12}}\right) - 2\left(x^{10} - \frac{1}{x^{10}}\right) - 4\left(x^8 - \frac{1}{x^8}\right) + 10\left(x^6 - \frac{1}{x^6}\right)$$

$$+ 5\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) = 20\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

ஆகவே,

$$-2^{11}\cos^5\theta \sin^7\theta = \sin 12\theta - 2\sin 10\theta - 4\sin 8\theta + 10\sin 6\theta \times 5\sin 4\theta - 20\sin 2\theta.$$

$$\therefore D^n(\cos^5\theta \sin^7\theta) = -2^{-11}\left\{12^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 12\theta\right) - 2\cdot 10^n\cdot\right.$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 10\theta\right) - 4\cdot 8^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 8\theta\right) + 10\cdot 6^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 6\theta\right)$$

$$\left. + 5\cdot 4^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 4\theta\right) - 20\cdot 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2\theta\right)\right\}$$

பயிற்சிகள் 12.

பின்வருவனவற்றிற்கு nஆம் வகைக்கெழு காண்க.

1. $\sin^3 x$.
2. $\cos^4 x$.
3. $\sin^4 x \cos^5 x$.
4. $\sin^3 x . \cos^3 x$.
5. $\sin x . \sin 2x . \sin^3 x$.
6. $e^{4x} \sin^2 x$.
7. $e^x \sin^3 a x$.
8. $e^x \sin x \sin 2 x$.
9. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$
10. $\dfrac{1}{4x^2+8x+3}$
11. $\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)}$
12. $\dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)}$

83. வகைக்கெழு அடங்கிய சமன்பாடுகளின் அமைப்பு (Formation of differential equations)

x, y என்றவற்றின் தொடர்பு தெரியின், அதனால் x, ,xஐப் பொறுத்த y-ன் வகைக்கெழு அடங்கிய ஒரு தொடர்பு பெரும்பாலும் காண இயலும். காணும் முறையினைக் கீழ்வரும் பயிற்சிகள் காட்டும்.

பயிற்சி 5.

$xy = ae^x + be^{-x}$ எனின்

$x\dfrac{d y}{d x_2} + 2\dfrac{dy}{dx} - xy = 0$ என்று நிறுவுக.

$$xy = ae_x + b\, e^{-x}$$

இரு பக்கங்களின் வகைக்கெழு காணின்,

$$y + x\frac{dy}{dx} = a\, e_x - b\, e^{-x}$$

இச் சமன்பாட்டின் இரு புறங்களின் வகைக்கெழுவை மறு முறையுங் கண்டால்,

$$\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - a_e x + b\, e_y^x.$$

(அ-து.)

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{d y}{dx} - xy = 0.$$

பயிற்சி 6.

$y = \sin(m \sin^{-1} x)$ எனின்

$(1-x^2)\, y_2 - xy_1 + my = 0$ என்று நிறுவுக.

$$y = \sin(m \sin^{-1} x)$$

$$\sin^{-1} y = m \sin^{-1} x.$$

இரு புறங்களிலும் x ஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{dx} = \frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2(1-y^2)$$

இச் சமன்பாட்டின் இரு புறங்களின் வகைக்கெழு காணின்,

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}\, 2\frac{dy}{dx} \cdot\ 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -2m^2 y\frac{dy}{dx}$$

பொதுச் சினையான $2\dfrac{dy}{dx}$ ஐ இரு புறத்தும் அகற்றினால்,

$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx} - x\dfrac{dy}{dx} + m^2y = 0$ என்று வரும்.

பயிற்சி 7.

$x = \sin\theta,\ y = \cos p\theta$ எனின்,

$(1-x^2)\, y^2 - xy_1 + p^2y = 0$ என்று நிறுவுக.

$x = \sin\theta \qquad\qquad y = \cos p\theta.$

$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta \qquad\qquad \dfrac{dy}{d\theta} = -p\sin p\theta.$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -p\,\frac{\sin p\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2\,\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = p^2\,\frac{1-y^2}{1-x^2}$$

$$\therefore 1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p^2(1-y^2)$$

இச் சமன்பாட்டின் வகைக்கெழு கண்டு பொதுச்சினையான

$2 \frac{dy}{dx}$ ஐ இருபுறத்தும் அகற்றின்,

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + p^2y = 0$ என்று வரும்.

பயிற்சிகள் 13.

1. $y = e^{a \sin^{-1} x}$ எனின், $(1-x^2)\ y_2 - xy_1 - a^2y = 0$ என்று நிறுவுக.

2. $y = (\sin^{-1}x)^2$ எனின், $(1-x^2)^2\ y^2 - xy_1 - 2 = 0$ என்று நிறுவுக.

3. $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ எனின், $x^2y + xy_1 + y = 0$ என்று நிறுவுக.

4. $x = \sin\theta, y = \sin p\theta$ எனின், $(1-x^2)\ y_2 - xy_1 + p^2y = 0$ என்று நிறுவுக.

5. $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ எனின், $(x^2-1)\ y_1 + xy_1 - m^2y = 0$ என்று நிறுவுக

6. $y = \cos(a\sin^{-1}x)$ எனின், $(1-x^2)\ y_1 - xy_1 + a^2y = 0$ என்று நிறுவுக.

7. $y = Ae^{-kt}\cos(pt+e)$ என்றால், $\frac{d^2y}{dt^2} + 2x\frac{dy}{dt} + n^2y = 0$ என்று நிறுவுக. இங்கு $n^2 = p^2 + k^2$.

8. $y = x^2\cos x$ எனின், $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + (x^2) + 6)y = 0$ என்று நிறுவுக.

9. $y = e_x\tan^{-1}x$ எனின், $(1+x^2)\ y - 2(1-x+x^2)\ y_1 + (1-x)^2y = 0$ என்று நிறுவுக.

10. $y = Ae_x + Be^{2x}$ எனின்,

$$(2x=1)\ \frac{d^2y}{dx^2} - (4x^2+1)\frac{dy}{dx} + 2(2x^2 - x + 1)\ y = 0$$

என்று நிறுவுக.

11. $ax^2 + 2hxv + by^2 = 1$ எனின், $D^2y = \frac{h^2-ab}{(hx+by)^3}$ என்று காட்டுக.

12. $x^3+y^3-3axy=0$ எனின், $D^2y = \dfrac{2a^3xy}{(ax-y^2)^3}$ என்று நிறுவுக.

13. $y=\log\left(\dfrac{x}{a-bx}\right)^x$ எனின், $x^2y^2=(y-xy_1)^2$ என்று நிறுவுக.

14. $y=\dfrac{ax+b}{cx+b}$ எனின், $2y_1y_3=3y_2^2$ என்று நிறுவுக. பின்னரும் $a+d=0$ என்று இருப்பின், $(y-x)y=2y(1+y_1)$ என்று நிறுவுக.

15. $y^2=(x-a)(x-b)$ எனின், $\dfrac{d^3}{dx^3}\left[\left\{\dfrac{d^2y}{dx^2}\right\}^{-2/3}\right]=0$ என்று நிறுவுக.

54. லீப்னிட்சின் தேற்றம் (Leibnitz Theorem): இத் தேற்றம் சார்பிரண்டின் பெருக்கத் தொகையின் n ஆம் வகைக்கெழுவை, அச் சார்புகளின் வகைக்கெழு அடங்கிய ஒரு கோவையாகக் காட்டும்.

u, v என்பவை x-ன் சார்புகளாக இருப்பின்,

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

(அ-து.) $D(uv) = v.\ Du+u.\ Dv$

இருபுறங்களிலும் வகைக்கெழு காணின்,

$$D^2(uv) = D(v.\ Du) + D(u.\ Dv).$$
$$= v\cdot D^2u+2\ Du\cdot Dv+u\ D^2v.$$

இவ்வாறே, $D^3(uv)=vD^3u+3\cdot D^2u\cdot Dv+3Du\cdot D^2v+u\cdot D^3v.$ இம்முறையே தொடர்ந்து வகைக்கெழு காணின் அவற்றில் உள்ள எண்கெழுக்களும், படிக் குறிகளும் ஈருறுப்புச் சேர்ப்புத் தேற்றத்தில் (Binomial Theorem) உள்ளவைபோல அமைந்திருப்பதை அறியலாம்.

ஆகவே, $$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \frac{d^nu}{dx^n}\cdot v+{}^nC_1\cdot\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dv}{dx} + {}^nC_2\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}+\ldots\ldots+{}^nC_1\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+u.\frac{d^nv}{dx^n}$$

55. இத் தேற்றத்திற்கு உய்த்தறிதல் முறைப்படி (Method of Induction) தெரிப்புக் காணும் வழி.

n-ன் மதிப்பு m ஆக இருக்கையில் இத் தேற்றம் உண்மை யெனக் கொள்வோம். அப்பொழுது $Dm\,(uv) = umv + mC_1 um^{-1} v_1 + mC \quad um\, v + \ldots\ldots +$

$m\, Cr - 1\, um - r + 1\, vr -_1 + m\, Cr\, um - r\, vr + \ldots\ldots + u\, vn$

இதன் வகைக்கெழு கண்டால்,

$D^{m+1}\,(uv) = (un + v_1 + um - v_2) + mC_1 \quad (um\, v_1 + um - v_1) + mC_2 \quad (um - v_1 + um - v_2) + \ldots\ldots\ldots + m \quad Cr -_1 \quad (um - r + vr + um - r + 1\, vr) + m\, Cr \quad (um - r + 1\, vr + um\, r\, vr + 1 + \ldots\ldots\ldots + (u\, vm + uvm + 1).$

$= um + 1\, v + (1 + mC)\, um\, v_1 + (mC_1 + mC)\, un - 1\, v + \ldots\ldots\ldots + \quad (mCr - 1 + m\, Cr) \quad um - r + 1\, v^r + \ldots\ldots\ldots + vm + 1$

$m\, Cr - 1 + m\, Cr = (m+1)\, Cr$ ஆதலின்,

$1 + mC_1 = (m+1)\, C, \; (mC + mC) = (m+1)\, C \ldots\ldots\ldots$

$\therefore \quad D^{m+1} \quad (uv) = un\, v + (m+1)\, C\, um\, v + (m+1) \quad C_2 \quad um - v_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (m+1)\, Cr\, um - v + 1\, vr + \ldots\ldots\ldots\ldots + u\, vm + 1$

ஆகவே, இத் தேற்றம் $(m+1)$-க்கும் உண்மையாகும். இதனல், n-ன் ஒரு மதிப்பான m-க்கு இத் தேற்றம் உண்மையாயின், அதன் அடுத்த மதிப்பான $(m+1)$-க்கும் உண்மையாகும். இத் தேற்றம் $n=1$ என்பதற்கு உண்மையென எளிதிற் காணலாம். ஆதலின், அதன் அடுத்த மதிப்பான 2-க்கும் ஆதலின், 3-க்கும்; இங்ஙனமே n-ன் மதிபபுகள் அனைத்திற்கும் இத் தேற்றம் உண்மையாகும்.

பயிற்சி 8.

$x^2 \log x$ ன் n ஆம் வகைக்கெழு காண்க.

$v = x^2$, $u = \log x$ என்று கொண்டால், $v_1 = 2x$, $v_2 = 2_2$ $v_3 = 0, \ldots\ldots\ldots$

$$u_1 = \frac{1}{x},\; u = -\frac{1}{x_2},\; \ldots\ldots\ldots\; u_n - \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)}{x^n}$$

$$\therefore \frac{d^n}{dx^n}\,(x^2 \log x) = u_n\, v_1\, C_1\, u_{n-1}\, v_1 + nC_2\, u_{n-2}\, v_2$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! x}{x^n} + nC_1 \frac{(-1)^{n-2} (n-2)!}{x^{n-1}} 2x$$

$$+ \frac{nC_2 (-1)^{n-3} (n-3)!}{x^{n-2}} . 2$$

$$= \frac{(-1)^{n-3} (n-3)!}{x^{n-2}} \Big\{ (n-1)(n-2) - 2n (n-2) + n(n-1) \Big\}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} 2. (n-3)!}{x^{n-2}}$$

பயிற்சி 9.

$y = \sin(m \sin^{-1} x)$ எனின், $(1-x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$ என்றும், $(1-x^2) y_{n+2} = (2n+1) x y_{n+1} + (n^2 - m^2) y_n$ என்றும் நிறுவுக.

இவ்வதிகாரத்தின் 6ஆவது பயிற்சியைக் காண்க.

$$(1-x^2) y_2 = xy_1 - m^2 y$$

லீபினிட்சின் தேற்றத்தால் ஒவ்வோர் உறுப்புக்கும் nஆம் வகைக்கெழு காண்க.

$$y_{n+2} (1-x^2) + nC_1 y_{n+1} (-2x) + nC_2 y_n (-2)$$
$$= y_{n+1} x + nC_1 y_n - m^2 y_n.$$
$$= y_{n+1} x + nC_1 y_n - m^2 y_n.$$
$$\therefore y_{n+2} (1-x^2) - 2nx y_{n+1} - (n-1) y_n =$$
$$n y_{n+1} + n y_n - m^2 y_n.$$

ஆகவே,

$$(1-x^2) y_{n+2} = (2n+1) x y_{n+1} + (n^2 - m^2)$$

பயிற்சிகள் 14.

1. nஆம் வகைக்கெழு காண்க:

(a) $x e^x$ (b) $x^2 e^x$ (c) $x \sin x$.

(d) $x^3 \cos x$ (e) $e^{ax} \sin bx$ (f) $e^x \log x$.

2. $y=(\sin^{-1} x)^2$ எனின்,

$$(1-x^2)\, y_{n+2} - (2n+1)\, x\, y_{n+1} - n^2 y_n = 0$$

என்று நிறுவுக.

3. $y = e^{a^{-1}, \sin x}$ எனின், $(1-x^2)\, y_{n+2}$ — $(2n+1)\, xy_{n+1} - (n^2+a^2)\, y_n = 0$ என்று நிறுவுக.

4. $y = A \cos(\log x) + B \sin \log x$ எனின், $x^2 y^{n+2}$ $(2n+1)\, x_{n+1} + (n^2+1)\, y_n = 0$ என்று நிறுவுக.

5. $y = x^2 e^x$ எனின் $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{2} n(n-1) \frac{d^2 y}{dx^2}$ —

$n(n-2) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\, y$ என்று நிறுவுக.

6. $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ என்றால், $(x^2-1)\, y_{n+2} +$ $(2n+1)\, xy_{n+1} + (n^2-m^2)\, y_n = 0$ என்று நிறுவுக.

7. $u = x^n v$, $v = \log x$ எனின், $\frac{d^n u}{dx^n} = 2. \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}}$ என்று நிறுவுக.

8. $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log n \left(\frac{x}{n}\right)$ எனின்,

$-y^2\, y_{n+2} + (2_{n+1})\, x\, yn+1\, 2n^2\, yu = 0$ என்று நிறுவுக.

9. $x + y = 1$ என்றால்,

$\frac{d^n}{dx^n}(x^n y^n) = n! \left\{ y^n - (nc_1)^2\, y^{n-1} x + \right.$

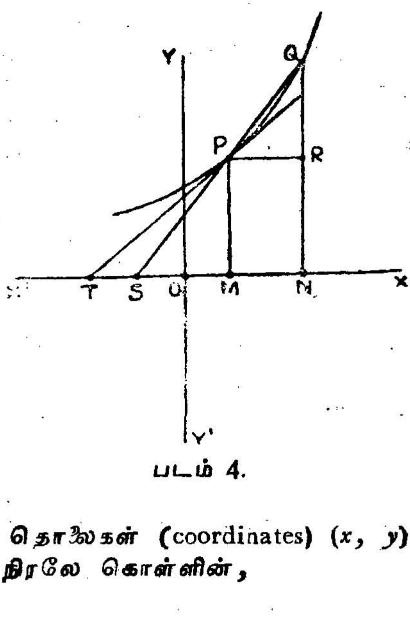
$\left. (nc_r)^2\, y^{n-2} x^2 + \ldots + (-1)^n x^n \right\}$ என்று நிறுவுக.

4. வகைக்கெழுவின் பொருள்

சார்பின் வகைக்கெழு காணும் முறை இதுகாறும் விளக்கப்பட்டது. இனி அதன் பொருள் இதுவென விளக்குவோம்.

56. வடிவங் கணித மூலம் $\frac{dy}{dx}$-ன் பொருள் காணல்

தொடர்ந்து வளைவரையான $y = f(x)$-ல் P, Q நெருங்கிய புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம். P, Q-லிருந்து x ஆயத்தோடு PM, QN குத்துக்கோடுகளும் P-லிருந்து QN-க்கு PR குத்துக்கோடும் வரைக.



படம் 4.

P நிலைப்புள்ளியாக Pஐ Q நெருங்கினால் PQ நாண் P-ன் கண் PT என்ற தொடுவரை ஆகும். இத்தொடுவரையின் போக்கு (direction) $\angle PTX$ ஆகும்.

இங்கே, $\angle PTX = \underset{Q \to P}{\text{Lt}} \angle PSX$

$= \underset{Q \to P}{\text{Lt}} \angle QPR$

P, Q என்பவற்றின் ஆயத் தொலைகள் (coordinates) (x, y) $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ என்று நிரலே கொள்ளின்,

$$\tan \angle PQR = \frac{PQ}{PR} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\tan \angle PTQ = \underset{Q \to P}{\text{Lt}} \tan QPR$$

$$= \underset{Q \to P}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta dy}{\Delta dx}$$

$$= \frac{dy}{dx}.$$

ஆகவே, $\frac{dy}{dx}$ = $(x, y$ புள்ளி இடத்துத் தொடுவரையின் சாய்வு வீதம் (gradient) ஆகும்.

57. வகைக்கெழுவின் குறி

$y = f(x)$ எனக்கொள்வோம். x-ன் மதிப்பு a ஆயின், y-ன் மதிப்பு $f(a)$ ஆகும். x-க்கு aஐக் காட்டிலும் சிறிது கூடிய ஒரு மதிப்புக்கொடுத்தால், y-ன் மதிப்பு $f(a)$ஐக் காட்டிலும் கூடவோ குறையவோ செய்யும். y-ன் மதிப்பு $f(a)$ஐ விடக்கூடுதலாக இருப்பின், $x=a$ இடத்து $f(x)$ கூடுஞ்சார்பு (increasing function) என்று கூறப்படும். y-ன் மதிப்பு $f(a)$ ஐக் காட்டிலும் சிறியதாயின் அவ்விடத்து $f(x)$ குறையுஞ்சார்பு (decreasing function) எனப்படும்.

$$x = a \text{ இடத்து } \frac{dy}{dx} = \underset{k \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

h-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாகவும், $\frac{dy}{dx}$ மிகைக் கணியமாகவும் இருப்பின், $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$-ம், மிகைக் கணியமே ஆகும்.

ஆகவே, h மிகைக் கணியமாகுங்கால் $f(a)+h) - f(a)$ மிகைக் கணியமாகும். h குறைக்கணியமாகுங்கால் $f(a+h) - f(a)$ குறைக்கணியமாகும்.

h நுண்ணிய மிகை எண்ணெயின்,

$f(a-h) < f(a) < f(a+h)$ எனவரும். ஆகவே, $x = a$ இடத்து $\frac{dy}{dx}$ மிகைக் கணியமாயின், $f(x)$ அவ்விடத்துக் கூடுஞ் சார்பாகும்.

அதுபோல $x = a$ இடத்து $\frac{dy}{dx}$ குறைக் கணியமாயின் $f(x)$ அவ்விடத்துக் குறையுஞ்சார்பு என எளிதில் நிறுவலாம்

ஆகவே, ஓர் இடத்தில் அல்லது வீச்சினுள் சார்பின் வகைக் கெழுவின் குறியிலிருந்து ஆண்டு அது கூடுஞ்சார்பென அல்லது குறையுஞ் சார்பென அறியலாம்.

பயிற்சி 1.

$x \lessgtr 2$ என்ற எல்லா x-ன் மதிப்புகளுக்கும் $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ மிகையாகும் என்று நிறுவுக.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$$

$$\therefore \; f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$= 3x(x-2)$$

$$x < 2 \text{ எனின்}, f'(x) = +$$

$$\therefore \; f(x) \text{ கூடுஞ் சார்பு.}$$

ஆனல், $f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 6 = 2 = +$

ஆனல், 2-க்கு மேற்பட்ட எல்லா x-ன் மதிப்புகளுக்கும் (2 உட்பட) $f(x)$ மிகையாகும்.

பயிற்சி 2.

x-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு $2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$ குறையுஞ் சார்பு?

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$$

$$\therefore \quad f^1(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$= 6(x-2)(x-1)$$

x-ன் மதிப்பு 1-க்கும் 2-க்கும் இடையில் இருப்பின், $f^1(x)$-ன் மதிப்பு குறைக்கணியமாகும். ஆகவே, அம் மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ குறையுஞ் சார்பு ஆகும்.

பயிற்சி 3.

x மிகை எண்ணாயின், $x - \frac{1}{2}x^2 < \log(1+x) < x$ என்று நிறுவுக.

$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \log(1+x)$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x}$$

$$= -\frac{x^2}{1+x}$$

x மிகை எண்ணாதலின், $f'(x)$ = குறைக்கணியம்.

$\therefore$ $f(x)$ குறையுஞ் சார்பு

சுன்னமாக x இருக்கையில் $f(x) = 0$

$\therefore$ x-ன் எல்லா மிகை மதிப்புகளுக்கும்

$$f(x) < 0$$

$$\therefore \quad x - \frac{1}{2}x^2 - \log(1+x) < 0$$

ஆகவே, $x - \frac{1}{2}x^2 < \log(1+x)$

$F(x) = \log(1+x) - x$ என்று கொள்வோம்

$$F'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$$

$$= -\frac{x}{1+x}$$

x மிகை எண்ணாயின் $F'(x)$-ன் குறை மதிப்பு எண்ணாகும்.

$\therefore$ $F(x)$ குறையுஞ் சார்பு.

$F(0) = 0$. $x < 0$ எனின் $F(x) < 0$

$$\therefore \log(1+x) - x < 0$$

(அ-து.) $\log(1+x) < x$

ஆகவே, $x - \frac{1}{2}x^2 < \log(1+x) < x$

பயிற்சிகள் 15.

1. ஒன்றைவிட x-ன் மதிப்பு பெரியதாக இருப்பின் $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$, $3x^4 + 8x^3 - 24x + 19$ என்ற பல்லுறுப்புச் சேர்ப்புகள் (polynomials) மிகை ஆகும் என்று நிறுவுக.

2. x-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு $x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ கூடுஞ் சார்பாகும்?

3. x-ன் எம் மதிப்புகளுக்குக் $2x^3 - 15x^2 - 84x + 7$ குறையுஞ் சார்பாகும்?

4, x-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு $2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$ கூடுஞ் சார்பாகும்? எம் மதிப்புகளுச்கு குறையுஞ் சார்பாகும்?

5. xஐ மிகை எண்ணுக வைத்து அடியிற் கொடுத்திருப்பவற்றை நிறுவுக:

(i) $x > \log x > \frac{x}{1 + x}$

(ii) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1$

(iii) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$

(iv) $\tan^{-1} x > \frac{x}{1 + x^2}$

(v) $x - \frac{1}{2}x^2, x - \frac{x^2}{2(1 + x)}$ என்பவற்றின் இடையே $\log(1 + x)$ இருக்கும்,

6. -2-லிருந்து $+2$-க்கு x கூடுங்கால், 1 — கூடுஞ் சார்பு எனவும், மற்றைய x-ன் மதிப்புகளு குறையுஞ் சார்பெனவும் நிறுவுக.

7. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ வீச்சில் $x \sin x + \cos x + \cos^2 x$ (சார்பு என நிறுவுக.

8. e-லிருந்து x-ன் மதிப்பு கூடுங்கால், $\frac{\log x}{x}$ குறைந்து கொண்டே வரும் என்று நிறுவுக.

9. x-ன் மதிப்பு கூடிவருங்கால் $\frac{1 - 2x - x^2}{1 + x - 2x^2}$ -ன் மதிப்பு குறைந்து வரும் என்று நிறுவுக.

10. சுன்னத்திலிருந்து [illegible] ண்ணிலிக்கு x கூடுங்கால் $\frac{\log(1 + x)}{x}$, $\frac{x}{(1 + x)\log(1 + x)}$ சார்புகள் குறைந்து கொண்டே வரும் என்று நிறுவுக.

58. மாறிகளின் மாறு வீதம் (Rate of change of variables)

மாறிகளின் மாறு வீதத்தினை வகைக்கெழுவால் அளக்கலாம்.

$y = f(x)$ என்று கொள்வோம்.

$x = a, a+h$ மதிப்புகளுக்கு எதிர் நிலையான y-ன் மதிப்புகள் நிரலே $f(a)$, $f(a+h)$ ஆகும்,

$$x\text{-ன் மாற்றம்} = h$$

அதன் எதிர் நிலையான y-ன் மாற்றம் $f(a+h) - f(a)$ ஆகவே, $(a, a+h)$ வீச்சில் xஐப் பொறுத்த y-ன் சராசரி மாறு வீதம் $= \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ இங்கு சுன்னத்தை h நெருங்குங்கால் $(a, a+h)$ வீச்சு a என்ற புள்ளி ஆகும். ஆகையால், a என்ற இடத்து xஐப் பொறுத்த x-ன் மாறு வீதம் =

$$\underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

பொதுப் படையாக xஐப் பொறுத்த y-ன் மாறுவீதம் $= \dfrac{dy}{dx}$.

4.

வரை $y = x^3 - 2x + 1$-லுள்ள $(2, 5)$ புள்ளியில், 'வகத்தைவிட 10 மடங்கு y கூடுவதென்றும், x கூடும் தவிட 12 மடங்கு சாய்வு வீதம் கூடுவதென்றும் நிறுவுக

$$y = x^3 - 2x + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$$

$(2, 5)$-ல் $\dfrac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு $= 3 \cdot 2^2 - 2 = 10$

$\therefore$ xஐப் பொறுத்த y-ன் மாறு வீதம் $= 10$

சாய்வு வீதம் (gradient) $= \dfrac{dy}{dx}$.

xஐப் பொறுத்த $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$-ன் மாறு வீதம் $= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 6x$

$(2, 5)$-ல் $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 12$

$\therefore$ xஐப் பொறுத்த சாய்வு வீத மாறு வீதம் 12.

பயிற்சி 5.

ஒரு வட்டத்தின் ஆரை நொடிக்கு 2 அங்குலம் வீதம் கூடுகிறது. ஆரையின் மதிப்பு 20 அங்குலமாயின் வட்டத்தின் பரப்பு எவ் வீதத்தில் கூடும்?

நொடிக்குப்பின் வட்டத்தின் ஆரை, பரப்பு என்றிவை r, A எனக் கொள்வோம்.

$$A=\pi r^2.$$

tஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dA}{dt}=2\pi r.\frac{dr}{dt}$$

$\frac{dr}{dt}=2$ ஆதலின், $\frac{dA}{dt}=4\pi r$,

20 அங்குலமாக r இருக்குங்கால்

பரப்பின் மாறு வீதம் $= 4\pi\times 20$

$= 80\pi$ ச. அ.

பயிற்சி 6.

ஒரு வட்டக் கூம்பின் (circular cone) ஆரை, நிமிடத்திற்கு 5 அடி வீதம் கூடுவதாகவும், அதன் உயரம் நிமிடத்திற்கு 2 அடி வீதம் குறைவதாகவும் இருப்பின், ஆரை 15 அடி ஆகவும், உயரம் 24 அடி ஆகவும் இருக்குங்கால் அதன் கனவளவு எவ் வீதத்தில் மாறும்?

t நிமிடத்துக்குப்பின் வட்டக்கூம்பின் ஆரை r ஆகவும், உயரம் h ஆகவும், கனவளவு V ஆகவும் கொள்வோம்.

$$\therefore\ V=\tfrac{1}{3}\pi r^2h$$

tஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dV}{dt}=\tfrac{1}{3}\pi\left(r^2\frac{dh}{dt}+2rh\frac{dr}{dt}\right)$$

$$\frac{dV}{dt}=5,\ \frac{dh}{dt}=-2$$

$$\therefore\ \frac{dv}{dt}=\tfrac{1}{3}\pi\,(10rh-2r^2)$$

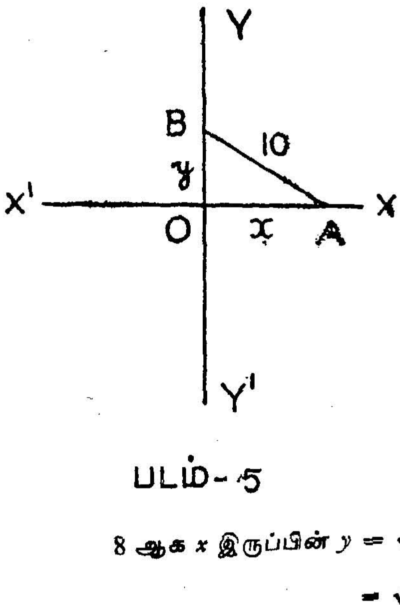
$r = 15,\ h = 24$ ஆயின், ஒரு நிமிடத்தில்

V-ன் மாறு வீதம் $= \frac{1}{3}\pi\ (3600-450)$ க. அடி

$= 1050\pi$ க. அடி.

பயிற்சி 7.

10 அடி நீளமுள்ள கோலின் நுனிகளான A, B எப்பொழுதும் x ஆயத்திலும் y ஆயத்திலும் உள. ஆதியிலிருந்து (origin) 8 அடிக்கு அப்பாலாகவும், நொடிக்கு 2 அடி வீதமும் A அகன்றால், எவ் வீதத்தில் B அகலும்?



படம்-5

t நொடிக்குப்பின் கோலின் இடம் AB என்றும், $OA = x$, $OB = y$ என்றும் கொள்வோம்.

$$A\text{-ன் வேகம்} = \frac{dx}{dt} = 2$$

$$x^2 + y^2 = 100$$

tஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு காணின்,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0.$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

8 ஆக x இருப்பின் $y = \sqrt{100 - x^2}$

$= \sqrt{100 - 64}$

$= 6$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{8}{6} \times 2$$

$$= -\frac{8}{3}.$$

ஆகவே, B-ன் வேகம் நொடிக்கு $-\frac{8}{3}$ அடி. குறைக் குறி Oஐ B நெருங்குவதைக் குறிக்கும்.

பயிற்சிகள் 16

1. x கூடும் வேகத்தைக் காட்டிலும் இருமடங்கு x^3-5x^2+5x+8 கூடின், x-ன் மதிப்புகள் என்ன ?

2. கோள வடிவாம் ஒரு பலூனில் நொடிக்கு 10 கன அங்குல வீதம் காற்று அடைத்துக்கொண்டே இருப்பின், அதன் ஆரை 15 அங்குலம் ஆகுங்கால் ஆரை எவ் வீதத்தில் கூடும் ?

3. கோளவடிவாம் ஓர் உலோக உருண்டையை 0° C-யிலிருந்து 20° C-க்குச் சூடாக்கின் அதன் கன அளவு எவ்வளவு கூடும்? அதன் ஆரை 2 அங்குலம் உலோகத்தின் நீட்டப் பெருக்கக்கெழு (linear expansion) ·0C002.

4. கூம்பு வடிவமான ஒரு பாத்திரத்தின் உயரம் 10 அங்குலம் ; ஆரை 5 அங்குலம்; நிமிடத்திற்கு $1\frac{1}{2}$ கன அங்குல வீதம் அதனுள் நீர் நிரப்பப்படுகிறது. தண்ணீர் மட்டம் 4 அங்குலத் திறகுக்கீழ் ஆயின், அது எவ் வீதத்தில் உயரும் ?

5. கூம்பு வடிவமான ஒரு பாத்திரத்தின் உயரம் ஓர் அடி. மேற்பாகத்தின் ஆரை 8 அங்குலம். அதனுள் நொடிக்கு 10 கன அங்குல வீதம் தண்ணீர் நிரப்பினல், 6 அங்குலம் உயரம் வரின் தண்ணீர் எவ்வீதத்தில் உயரும் ?

6. கூம்பு வடிவமான ஒரு பாத்திரத்தின் ஆரை 5 அங்குலம், உயரம் 12 அங்குலம். நிமிடத்திற்கு 12 கன அங்குல வீதம் அதனுள் நீர் ஊற்றப்படுகிறது. நீர் மட்டத்தின் உயரம் 6 அங்குலமாயின் அது எவ்வேகத்தில் உயரும் ?

7. 2 அங்குல உயரமும் 4 அங்குல ஆரையும் உடைய வட்டக் கூம்பான ஒரு வடிதாள் வழியாக நிமிடத்திற்கு 2·25 க. அங்குல வீதம் நீர் வடியின், நீர் மட்டம் 3 அங்குலம் குறைகையில் அது எவ்வீதத்தில் குறையும் ?

8. 2 அங்குல உயரமும் 2 அங்குல ஆரையும் உடைய ஒரு வட்டக் கூம்புப் புனலின் நிரம்பிய நீர், நிமிடத்திற்கு ஒரு கன அங்குல வீதம் ஒழுகிக்கொண்டிருக்கிறது. நீர் மட்டம் ஓர் அங்குலம் குறைகையில் அது எவ் வீதத்தில் கீழே இறங்கும் ?

9. சமபக்க முக்கோணத்தின் ஒவ்வொருபக்கமும் மணிக்கு 2 அங்குலம் வீதம் கூடுகின்றது. அதன் பக்கம் 10 அங்குலம் ஆகின், அதன் பரப்பு எவ்வீதத்தில் கூடும்?

10. கன சதுரத்தின் (cube) ஒவ்வொரு பக்கமும் ஓர் அங்குல வீதம் கூடின், அதன் (1) பருமன் (2) புறப்பரப்பு (surface) (3) மூலவரை (diagonal) என்றிவை பக்கம் ஓர் அடியாக இருக்கையில் எவ் வீதத்தில் கூடும் ?

11. ஒரு கன சதுரத்தின் பக்க நீளமும், ஒரு கோளத்தின் ஆரை நீளமும் சமமாக இருக்கின்றன. இரண்டும் ஒரே வீதத்தில் கூடின் கன சதுரத்தின் பருமன் கூடும் வீதத்தினுள் நான்கு மடங்குக்குமேல் கோளத்தின் பருமன் வீதம் கூடும் என்று நிறுவுக.

12. 20 அடி நீளமுள்ள ஓர் ஏணி சுவர்மேல் சார்த்தப்பட்டிருக்கிறது. அதன் அடிப்பாகம் நழுவிச் சுவருக்கு 16 அடிக்கு அப்பால் இருக்கையில், ஏணியின்மேற்பாகத்தின் வேகம் $= \frac{4}{3}$ அடிப்பாகத்தின் வேகம் என்று நிறுவுக.

13. சுவர்மீது சார்த்தப்பட்ட 20 அடி நீளமுள்ள ஓர் ஏணியின் அடிப்பாகம் நழுவிச் சுவரிலிருந்து 8 அடிக்கு அப்பால் இருக்கையில் அடியின் வேகம் நொடிக்கு 2 அடியாயின் மேற்பாகம் எவ்வேகத்தில் கீழ் இறங்கும் ? ஏணியின் இரு முனைகளும் ஒரே வேகத்தில் நகர்வதாயின் அடிப்பாகம் சுவரிலிருந்து எவ்வளவு தொலைவில் இருத்தல் வேண்டும் ?

14. 6 அடி உயரமுள்ள ஒருவன் 15 அடி உயரத்தில் தொங்கும் ஒரு விளக்கின் நேர் கீழிடத்திலிருந்து 175 அடி வீதம் நடந்து சென்றால், அவனது நிழலின் நீளம் எவ்வீதத்தில் கூடும் ?

15. 10 அடி உயரத்தில் தொங்கும் ஒரு விளக்கின் நேர் கீழிடத்திலிருந்து 6 அடி உயரமுள்ள ஒருவன் மணிக்கு 3 மைல் வீதம் நடந்து செல்வதாயின் அவன் தன் நிழலின் வேகம் எந்த வேகத்தில் செல்லும் ?

16. 6 அடி உயரத்தான் ஒருவன் மணிக்கு 3 மைல் வீதம் 20 அடி உயரமுள்ள ஒரு விளக்குத் தூணிலிருந்து நடந்து 50 அடிக்கு அப்பால் செல்கையில் அவன் தன் நிழலின் வேகம் என்ன ?

17. $5\frac{1}{2}$ அடி உயரிய ஒருவன் மணிக்கு 3 மைல் வீதம் ஒரு தெரு வழியாகச் செல்கிறான். அத் தெருவிலிருந்து 100 அடிக்கு அப்பால் 106 அடி உயரமுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கு உண்டு.

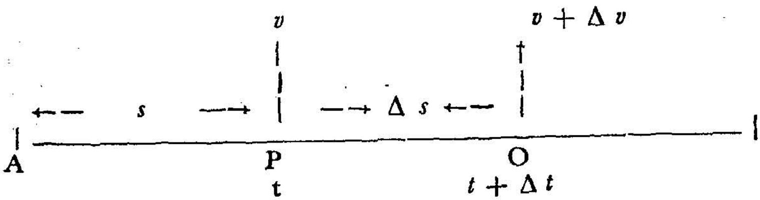
அவன் கலங்கரை விளக்கின் அடி நிலத்திலிருந்து x அடிக்கு அப்பால் இருக்கையில் அவனது நிழலின் நீளம் எவ் வீதத்தில் மாறும் ?

18. ஒரு மின்சார விளக்கின் உயரம் 20 அடி. விளக்கு மட்டத்தில் 5 அடிக்கு அப்பால் உள்ள ஒரு பொருள் பூமியின் கவர்ச்சியால் இழுக்கப்பட்டு 17 அடி விழுந்த பிறகு தரையில் தோன்றும் அதன் நிழலின் வேகம் என்ன ?

19. 8 அடி நீளமுள்ள நெட்டச்சும், 6 அடி நீளமுள்ள குற்றச்சுமுடைய ஒரு நீள்வட்டத்தின் வழியாக நொடிக்கு ஓர் அடி வீதம் ஒரு பொருள் செல்கின்றது. அப் பொருள் நெட்டச்சிலிருந்து ஓர் அடிக்கு அப்பால் இருக்கையில் அங்கிருந்து நெட்டச்சுக்கு வரையும் செங்கோட்டு அடியின் வேகம் என்ன ?

20. புவிக்கவர்ச்சியினால் பரவளையத்தில் (Parabola) செல்லும் ஓர் எறிபொருளின் பாதையில் விளக்கொன்று உண்டு. செங்குத்தான சுவரின்மேல் அப்பொருளின் நிழல் விழுந்தால், அந் நிழல் ஒரே வேகத்தோடு செல்லும் என்று நிறுவுக.

59. விசையும், விசை மாறு வீதமும் (Velocity and acceleration)



படம் 6.

A என்ற நிலைப்புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்ட ஒரு பொருளுக்கு $t, t + \Delta t$-க்குப் பின்னர் A-விருந்து அதன் தொலைகள் முறையே $s, s + \Delta s$ என்றும்; அதன் விசை P-ல் v என்றும் Q-ல் $v + \Delta v$ என்றும் கொள்வோம். ஆகவே, காலம் Δt-ல் அப் பொருள் செல்லும் தொலை $= \Delta s$.

$$\therefore \; PQ\text{-ல் சராசரி விசை} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

சுன்னத்தை Δt நெருங்கும்பொழுது Pஐ Q நெருங்கும்.

$$\therefore \quad P\text{-ல் அப்பொருளின் விசை} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\frac{ds}{dt}.$$

$$\text{ஆகவே, } v = \frac{ds}{dt}.$$

$$PQ\text{-ல் சராசரி விசை மாறு வீதம்} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\text{ஆகவே } P\text{-ல் விசைமாறு வீதம்} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

ஒரு நிலைப் புள்ளியிலிருந்து இயங்கும் ஒரு பொருளின் தொலை காலத்தில் சார்பாகும். $y = f(x)$-ல் xஐப் பொறுத்த y-ன் மாறு வீதம் $\frac{dy}{dx}$ என்று பார்த்தோம். அதுபோன்று காலத்தைப் பொறுத்த தொலையின் மாறு வீதம் விசையாகும். இவ் விசையின் மாறும் வீதம் 'விசைமாறு வீதம்' எனப்பெயர்பெறும்.

$$\text{ஆகவே, } v = \frac{ds}{dt}\,; \quad a = \frac{dv}{dt}.$$

பயிற்சி 8.

செங்குத்தாக உயர எறியப்பட்ட ஒரு பொருள் t நொடிப் பொழுதில் s அடி உயரம் செல்லுமாயின் 2 நொடிக்குப் பின் அதன் வேகமென்ன? அதன் விசைமாறு வீதம் என்ன? இங்கு $s = 80; \ t = 16\,t^2$

$$s = 80\,t - 16\,t^2$$

$$\frac{ds}{dt} = 80 - 32t.$$

$$\text{ஆகவே, விசை } v = 80 - 32t.$$

2 நொடிக்குப் பின் அதாவது $t = 2$ ஆகுங்கால்

$$v = 80 - 32 \times 2 = 16$$

ஆகவே, 2 நொடிக்குப்பின் அப்பொருள் நொடிக்கு 16 அடி வீதம் உயரச் செல்லும்.

$$\text{விசைமாறு வீதம்} = \frac{dv}{dt} = -32$$

பயிற்சி 9.

$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ என்று நிறுவுக. $v^2 = s^2 + 4s + 4$ எனின், புறப்பட்ட இடத்திற்கு 10 அடிக்கு அப்பால் அதன் விசைமாறும் வீதம் என்ன ?

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = v \text{ ஆகையால் } \frac{dv}{dt} = v \cdot \frac{dv}{ds}$$

$$s = 10 \quad \therefore \quad v^2 = 10^2 + 4 \times 10 + 4 = 144$$

$$\therefore \quad v = 12$$

$$v^2 = s^2 + 4s + 4$$

sஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு காணின்,

$$2v\frac{dv}{ds} = 2s + 4$$

$s = 10$ அடி ஆயின் $v = 12$

$$\therefore \quad 2 \times 12 \frac{dv}{ds} = 2 \times 10 + 4$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{ds} = 1$$

ஆகவே, விசை மாறு வீதம் $= v\frac{dv}{ds}$

$$= 12.$$

பயிற்சி 10.

0 என்ற நிலைப்புள்ளி உடைய கோட்டின் வழிச் செல்லும் ஒரு பொருள் t நொடிக்குப்பின் 0-லிருந்து s அடி தாண்டி இருக்கிறது. $s = 10 + 27t - t^3$ எனின், அப் பொருளின் இயக்கத்தை விளக்குக.

$$s = 10 + 27t - t^3$$

$$t = 0 \text{ ஆயின் } s = 10$$

ஆகவே, 0-விலிருந்து 10 அடி தாண்டி அப் பொருள் புறப் படுகிறது.

t நொடிக்குப்பின் விசை $= \frac{ds}{dt} = 27 - 3t^2$

ஆகவே, தொடக்க விசை நொடிக்கு 27 அடி.

$$\frac{ds}{dt} = 27 - 3t^2$$

$t = \pm 3$ ஆயின் விசை 0

குறை மதிப்பை கண்டுக்கொள்ள வேண்டாம்.

$t = 3$ ஆக இருக்கையில் $s = 10 + 27 \times 3 - 3^3$

$= 64$ அடி

$t > 3$ ஆகின் $\frac{ds}{dt} = -$.

ஆகவே, அதன் விசையின் திசை மாறுகிறது. அதாவது அப் பொருள் 0-வ்விலிருந்து 64 அடி தாண்டிச் சென்று மீண்டும் 0ஐ நோக்கிவரும்.

O-விற்கு வரும்பொழுது $s = 0$

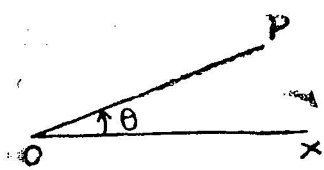
$$\therefore \quad 10 + 27t - t^3 = 0$$

O-விற்கு வர எவ்வளவு நொடி ஆகும் என்பதை இச் சமன்பாட்டை விடுவித்துக் காண்க.

$$\text{விசை மாறு வீதம்} = \frac{dv}{dt} = -6t.$$

ஆகவே அப் பொருளின் விசை குறைந்து வரும்.

60. கோண விசையும், கோண விசை மாறுவீதமும் (Angular velocity and angular acceleration)



படம்-7

OX நிலைக் கோட்டில் O ஒரு நிலைப் புள்ளி. OP கோடு OX-லிருந்து புறப்பட்டு, t நொடிக்குப் பின் மேற் காட்டிய நிலைக்கு வந்தால் (அஃதாவது OX சுற்றின கோணம் θ ஆரையனாக இருப்பின்)

$$OP\text{-ன் கோண விசை} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{கோண விசை மாறு வீதம்} = \frac{d}{dt}\,(\text{கோண விசை})$$

$$= \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

கோண விசையை ω என்னும் கிரேக்க எழுத்தால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$$\text{கோண விசை மாறு வீதம்} = \frac{d\omega}{dt}$$

பயிற்சி 11.

t நொடியில் $4t+5t$: ஆரையன் சுற்றும் ஓர் உருளைக்கு 5 நொடிக்குப்பின் கோண விசையும் கோண விசை மாறுவீதமும் என்ன ?

t நொடியில் சுற்றின கோணம் θ ஆரையன் என்று கொண்டால்,

$$\theta = 4t + 5t^3$$

$$\text{கோண விசை} = \frac{d\theta}{dt} = 4 + 15t^2$$

$$5 \text{ நொடிக்குப்பின் கோண விசை} = 4 + 15 \cdot 5^2$$

$$= 379 \text{ ஆரையன்}$$

$$\text{கோண விசை மாறுவீதம்} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\; 30t.$$

5 நொடிக்குப்பின் கோண விசை மாறுவீதம் = 150 ஆரையன்

பயிற்சிகள் 17.

1. பயிற்சி (1) முதல் (4) வரை விசையும், விசை மாறு வீதமும் காண்க.

(1) $s = 12 + 20t - 2t^2$

(2) $s = t^3 - 2t^2 + 4$

(3) $s = 10 \cos \frac{\pi t}{2}$

(4) $s = 6t + \frac{7}{t+1}$

2. தொடக்க விசையும் தொடக்கத் தொலையும் காண்க.

(1) $s = t^4 + 3t^2 + 4$

(2) $s = 8 \cos 2t + 4 \sin t$.

3. $s = 16 + 48t - t^3$ என்றிருக்க ஒரு பொருள் செல்கின்றது அது தான் செல்லும் திசையை எப்பொழுது எவ்விடத்து மாற்றிக் கொள்ளும் ?

4. ஒரு சின்னம் t நொடியில் செல்லும் தொலை $s = ae^{t} + be^{-t}$ எனின், அதன் விசை மாறு வீதம் தொலைக்குச் சமம் என்று நிறுவுக.

5. ஓர் அடி ஆரையும் O மையமும் உடைய ஒரு வட்ட வரையில் A ஒரு நிலைப்புள்ளி. அப்புள்ளியிலிருந்து P புறப்பட்டு ஒரு நொடியில் அவ் வட்டவரையைச் சுற்றுகிறது. $\angle AOP = 60^\circ$ ஆயின், முக்கோண AOP-ன் பரப்பு எவ்வீதத்தில் மாறும் ?

6. ஒரு சுழலுருளை t நொடியில் θ° சுற்றுகிறது. இங்கு $\theta = 72t - 5t^2$ எனின், 8 நொடிக்குப்பின் அதன் கோண விசை யாது ? அதற்குக் காலம் யாது ?

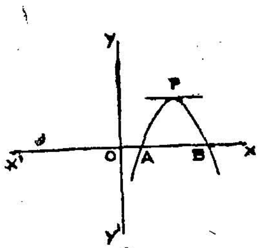
5. ரோல்சின் தேற்றமும், இடை மதிப்புத் தேற்றமும்

(Rolle's Theorem, Mean Value Theorem)

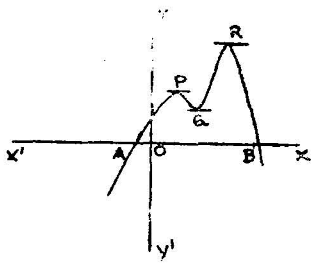
61. ரோல்சின் தேற்றம் (Rolle's Theorem)

(a, b) வீச்சில் $f(x)$, $f'(x)$ தொடருடைச் சார்புகளாகவும், x-ன் மதிப்புகள் a, b ஆக இருக்கையில் $f(x)$-ன் மதிப்பு சுன்னமாகவும் இருப்பின், a, b என்பவற்றின் இடையிலுள்ள x-ன் யாதேனும் ஒரு மதிப்புக்காவது $f'(x)$-ன் மதிப்பு சுன்னமாகும்.

இத்தேற்றத்தின் உண்மை படத்தின்மூலம் எளிதில் விளங்கும்.



படம்-8



படம்-9

$y = f(x)$ வளைவரை x ஆயத்தை $A\ (x = a, y = 0)$, $B\ (x = b, y = 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டுமெனக் கொள்வோம். $f(x)$, $f'(x)$ (தொடுவரையின் சாய்வு) A, B-ல் தொடர்ச்சி உடையனவாய் இருப்பின், A, B புள்ளிகட்கு இடையிலுள்ள ஏதாவதொரு புள்ளியில் தொடுவரை x ஆயத்துக்கு ஒருபோகுக்கோடாக இருத்தல் வேண்டுமெனக் காணலாம்.

பிரிதொரு தெரிப்பு

a, b என்பவற்றின் இடையே உள்ள x-ன் மதிப்புகளுக்கு $f'(x)$-ன் மதிப்பு எப்பொழுதும் மிகையாகவோ குறையாகவோ இருப்பின், $f(x)$ தொடர்ச்சியாகக் கூடுஞ்சார்பாகவோ குறையுஞ்சார்ப்பாகவே இருக்கும். ஆகையால் தேற்றத்தில் கூறியிருப்பது போல், x-ன் a, b என்ற மதிப்புகளுக்கு $f(x)$-ன் மதிப்பு சுன்னமாக இருத்தல் முடியாது. ஆகவே, $f'(x)$ அவ்வீச்சில் குறி மாறுதல் வேண்டும். $f'(x)$ தொடருடைச் சார்பாக இருப்பதால், a, b என்பவற்றின் இடைப்பட்ட x-ன் யாதேனும் ஒரு மதிப்புக்கு $f(x)$-ன் மதிப்பு சுன்னமாக இருத்தல் வேண்டும்.

இத் தேற்றத்தைப் பின்வருமாறும் விளக்கலாம் :

$f(x) = 0$-ன் இயல்புத் தீர்வுகள் இரண்டிற்கிடையே (real roots) $f'(x) = 0$-ன் இயல்புத் தீர்வு ஒன்றாவது இருத்தல் வேண்டும்.

பயிற்சிகள் 18.

1. $f(x) = (x-a)^m (x-b)^n$ என்று வைத்து இத் தேற்றத்தை மெய்ப்படுத்துக.

$x = a$; $x = b$ என்றிருப்பின், $f(x)$-ன் மதிப்பு சுன்னமாகும்.

$$f'(x) = (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}\{(m+n)x - mb - na\}$$

ஆகவே, x-ன் மதிப்பு $\frac{mb+na}{m+n}$ என்றிருக்கையில் $f'(x)$-ன் மதிப்பு சுன்னதாகும்.

a, b இவற்றிடையே $\frac{mb+na}{m+n}$ இருக்கிறது.

2. எண் இரண்டிற்கிடைப்பட்ட x-ன் n மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ சுன்னமாயின் அத்தன்மையுடைய x-ன் $(n-1)$ மதிப்புகளுக்கு $f(x)$-ன் முதல் வகைக்கெழு சுன்னமாகும் என நிறுவுக.

3. $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a^1}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$ என்றிருப்பின் $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளுள் ஒன்றாவது 0, 1 என்பவற்றின் இடையே இருக்கும் என்று நிறுவுக.

62. இடை மதிப்புத் தேற்றம் (Mean Value Theorem)

(a, b) வீச்சில் சார்புகள் $f(x), f_1(x)$ தொடர்ச்சி உடையனவாக இருப்பின், a, b என்பவற்றின் இடைப்பட்ட x-ன் யாதொரு மதிப்புக்கேனும் (எடுத்துக்காட்டாக x_1-க்கு)

$$f_1(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$ என்று இருக்கும்.

$F(x) = f(b) - f(x) - (b-x) R$ என்றும்,

$f(b) - f(a) - (b-a) R = 0$ என்றும் கொள்வோம்.

$$\therefore \; R = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$F(b) = f(b) - f(b) - (b-b) R = 0$

$F(a) = f(b) - f(a) - (b-b) R = 0$

$F(x)$, $F'(x)$ தொடருடைச் சார்புகளாகும்.

$\therefore$ a, b என்பவற்றிற் கிடைப்பட்ட x-ன் யாதோ ஒரு மதிப்புக்கேனும் (எடுத்துக்காட்டாக x_1-க்கு) $F'(x)$-ன் மதிப்பு சுன்னமாகும்.

$$\therefore \; F'(x_1) = 0$$

$F(x)$-ன் வகைக்கெழு காணின்,

$$F'(x) = -f'(x) + R$$

$$\therefore \; F'(x_1) = -f'(x_1) + R$$

ஆகவே, $-f'(x_1) + R = 0$

$$\therefore \; f'(x_1) = R = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

63. பிறிதொரு வகையிலும் இத் தேற்றத்தை எழுதலாம்.

$b - a = h$ என்று கொண்டால், $\theta = 0$ என்றிருக்குங்கால் a ஆகவும், $\theta = 1$ என்றிருக்குங்கால் b ஆகவும் $a + \theta_2$-ன் மதிப்புகள் உள்ளன. ஆகவே $0 < \theta < 1$ என்றிருக்கையில், a, b என்பவற்றிற்கு இடையில் $a + \theta h$-ன் மதிப்பு இருக்கும்.

ஆகையால், $f(a+h) - f(a) = h f'(a + \theta h)$

அல்லது $f(a+h) = f(a) + h f'(a + \theta h)$

பயிற்சி 1.

$f(x)$ இருபடியச் (quadratic) சார்பாயின் $\theta = \frac{1}{2}$ என்று நிறுவுக.

$f(x) = lx^2 + mx + n$ எனக் கொள்வோம்.
மேற்சொன்ன தேற்றப்படி,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a + \theta h)$$

$$f'(x) = 2\,lx + m$$

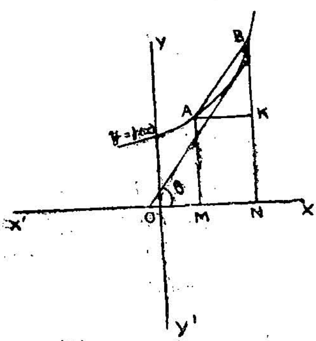
$\therefore\ l(a + h)^2 + m(a + h) + n = la^2 + ma + n + h\{2h(a + \theta h) + m\}$

(அ-து.) $la^2 + ma + n + 2\,lah + lh^2 + mh = la^2 + ma + n + 2\,lah + 2\,lh^2\,\theta + mh.$

$$\therefore\ 2\,\theta l\,h^2 = lh^2$$

$$\therefore\ \theta = \tfrac{1}{2}$$

64. மற்றொரு தெரிப்பு: இத் தேற்றத்திற்கு வடிவ கணித மூலம் தெரிப்புக் காணலாம்.



படம் 10

$\{a, f(a)\}$ புள்ளி A என்றும், $\{b, f(b)\}$ புள்ளி B என்றும் கொள்வோம்.

AB நாணின் (Chord) சாய்வு $= \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ y-ம் அதன் வகைக் கெழுவும் தொடர்ச்சி உடையனவாய் இருப்பின், வளை வரையில் A, B புள்ளிகட்கு இடையில் ஏதாவதொரு புள்ளியில் தொடுவரை AB-க்கு ஒரு போக்குக் கோடாகும் என நன்கு அறியலாம்.

அஃதாவது $\tan\theta = f'(x) = \tan BNK$ என்றிருக்க, P என ஒருபுள்ளி இருக்கும். அப் புள்ளியின் x ஆயத்தொலை x_1 என்று கொண்டால், $f'(x_1) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

65. பொதுப்படுத்தப்பட்ட இடைமதிப்புத் தேற்றம் (Generalised Mean Value Theorem)

(a, b) வீச்சில் x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $f(x)$-ம் அதன் n வகைக்கெழுவும் வரையறுக்கப்படின்,

$$f(b) = f(a) + (b-c)f'(\mathrm{a}) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n^{-1})!} f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(a+\theta)\frac{n!}{(b-a)}$$

இங்கு $0<\theta<1$

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)'}{2!} f''(x) \ldots$$

$$- \frac{(b-x)^{n-1}}{(n^{-1})!} f^{n-1}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} Q \text{ என்றும்,}$$

இங்கு Q அடியிற்கண்ட சமன்பாட்டிற்கு உட்பட்டது என்றும் கொள்வோம்.

$$0 = f(b) - (a) \quad (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} - f'(a) \ldots$$

$$- \frac{(b-a)^{n-1}}{(n^{-1})!} f^{n-1}(a) - \frac{(b-a)^2}{n!} Q.$$

$$F(a) = 0, \; F(b) = 0$$

ஆகவே, a, b என்பவற்றிற்கு இடையிலுள்ள x-ன் யாதொரு மதிப்புக்காவது $F'(x)$ சுன்னமாக இருக்கும். அம் மதிப்பு x_1 என்று கொண்டால் $F'(x_1) = 0$

$F(x)$-ன் வகைக்கெழு காணின்,

$$F'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) + (b-x)f''(x) \ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n^{-1})!} f^n(x) + \frac{(b)-x)^{n-1}}{(n^{-1})!} Q$$

$$= \frac{(b-x)^{n-1}}{(n^{+1})!} \left\{ Q - f^n(x) \right\}$$

$F'(x_1) = 0$

$$\therefore \quad \frac{(b-x_1)^{n-1}}{\angle (n-1)!}\left\{ Q - f^n(x_1) \right\} = 0$$

$bx \neq {}_1$ ஆகவே, $Q = f^n(x_1)$

x_1-க்குப் பதில் $a + \theta(b-a)$ என்று எழுதின், $0 < \theta < 1$

$$: f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots = \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(a + \theta\overline{(b-a)} \quad \ldots(1)$$

66. இங்கு $b - a = h$ என்று கொளின்,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(a + \theta h)$$

(1) -ல் b-க்குப் பதில் x என்று எழுதின்,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)_n}{n!} f_n\overline{(a + x - a\theta)}$$

இங்கு a-க்குப்பதில் சுன்னத்தை ஈடாக்கின்,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x)$$

இதனை மெக்லாரின் தேற்றம் (Maclaurin's Theorem) எனவும், பொதுப்படுத்த இடைமதிப்புத் தேற்றத்தை டெயிலர் தேற்றம் (Taylor's Theorem) எனவும் கூறுவர்.

பயிற்சி 2.

x-ன் மதிப்பு மிகையாயின், $x > \log(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2$ என்று நிறுவுக.

$f(x) = \log(1+x)$ என்று கொள்வோம். மேலைய தேற்றப் படி,

$f(x) = f(0) + xf'(\theta x)$ இங்கு $0 < \theta < 1$

$f(0) = \log(1+0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^8}, \quad f'(\theta x) = \frac{1}{1+\theta x}.$$

$$\therefore \quad \log(1+x) = \frac{x}{1+\theta x}$$

$1 + \theta x$ ஒன்றைவிட எப்பொழுதும் பெரியது.

$\therefore \log(1+x) < x$

மேலும் $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)$

$$f''(x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad f''(\theta x) = -\frac{1}{(1+\theta x)^2}$$

$$f'(0) = 1$$

$$\therefore \quad \log(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+\theta x)^2}$$

$$\log(1+x) - x = -\frac{x^2}{2}\frac{1}{(1+\theta x)^2}.$$

$$= \frac{1}{(+\theta x^2)} < 1$$

ஆகவே, $x - \log(1+x) = \frac{x^2}{2} < \frac{1}{(1+\theta x)}$

$$< \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \quad x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$$

ஆகவே, $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x.$

பயிற்சிகள் 19.

(1) $x - \log(1+x) < \frac{x}{2(1+x)^2}$ என்று நிறுவுக.

(2) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2}$ என்று நிறுவுக.

(3) $f^n(x)$ தொடருடையச் சார்பாயின்,

$$\underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+2h) - f(x+h) + f(x)}{h^2} = f''(x)$$

என்று நிறுவுக.

67. சமன்பாட்டுக் கொள்கை (Theory of equations)

x-ன் தொகுத்த சார்பாக (Integral function) $f(x)$ இருப்பின் x-ன் முடிவுடை மதிப்புகளுக்கு $f(x)$-ம், அதன் வகைக்கெழுவான $f'(x)$-ம் தொடருடைச் சார்புகளாகும். ஆகவே, ரோல்சின் தேற்றப்படி $f(x)=0$-ன் ஈரியல்புத் தீர்வுகளின் இடையில் $f'(x)=0$-ன் ஓரியல்புத் தீர்வாவது இருக்கும். ஆகவே, $f'(x)=0$-( ) தொடர்ந்த ஈரியல்புத் தீர்வு ஒன்றிற்கு மேல் இராது. சிற்சில சமயங்களில் அது தானும் இல்லையாதலால் உண்டு. α, β என்பவை $f'(x)=0$-ன் தொடர்ந்த இயல்புத் தீர்வுகள் என்று கொள்வோம். இவற்றிடையே $f(x)=0$-ன் இரு தீர்வுகள் இருப்பின் அத் தீர்வுகட்கு இடையே $f'(x)=0$-ன் தீர்வு இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே, α, β என்பவை நாம் கருதியதற்கு மாறுகத் தொடர்ந்த தீர்வுகளாகமாட்டா.

ஆகவே, $f'(x)=0$-ன் இயல்புத் தீர்வுகள் $f(x)=0$-ன் தீர்வுகளைப் பிரிக்கின்றன. α, β என்ற $f'(x)=0$-ன் இயல்புத் தீர்வுகளின் இடையே $f(x)=0$-ன் இயல்புத் தீர்வு இருப்பின் $f(\alpha)$, $f(\beta)$ என்றிவற்றின் குறிகள் வேறுபடும்.

பயிற்சி 3.

எடுத்துக்காட்டாக $f(x)=4x^3-21x^2+18x+2=0$ என்ற சார்பை ஆராய்வோம்.

$$f'(x)=12x-42x+18$$
$$=6(2x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$-ன் இயல்புத்தீர்வுகள் $\frac{1}{2}$, 3 ஆகவே, $f(x)=0$-ன் தீர்வுகள் இயல்பாயின், அவை, முறையே $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 3)$, $(3, +\infty)$ என்ற வீச்சுகளில் உள்ளன.

$x=-\infty$	எனின்,	$f(x)$-ன்	குறி	$-$
$x=\frac{1}{2}$	,,	$f(x)$	,,	$+$
$x=3$	,,	$f(x)$	,,	$-$
$x=\infty$	,,	$f(x)$	,,	$+$

ஆகவே, மேற்கண்ட ஒவ்வொரு வீச்சிலும் $f(x)=0$-ன் இயல்புத் தீர்வு உண்டு.

$\therefore f(x)=0$-க்கு 3 இயல்புத் தீர்வுகள் உள.

68. சம தீர்வுகள் (Equal roots)

$f(x) = 0$ சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளுள் பலவற்றின் மதிப்பு ஒரே அளவினதாக இருப்பின், அத் தீர்வுகள் சம தீர்வுகள் (equal roots) எனப்படும்.

$f(x)$ தொகுத்த சார்பும், $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு a மதிப்புடையவை சம தீர்வுகளும் இருப்பின்,

$$f(x) = (x-a)^m \phi(x)$$

$$\therefore f'(x) = (x-a)^m \phi'(x) + m(x-a)^{m-1} \phi(x)$$

$$= (x-a)^{m-1} \{(x-a)\phi^1(x) + m\phi(x)\}$$

$\therefore f(x)\ f'(x)$ என்பவற்றின் பொதுச் சினை (common factor) $(x-a)^{m-1}$ ஆகும். ஆகவே, $f(x), f'(x)$ என்பவற்றின் மீப்பெரு பொதுமடங்கை (highest common multiple) $(x-a)^{m-1}$ ஆயின், $f(x)$-ன் சினை $(x-a)^m$ ஆகும். எனவே, $f(x)$-ன் மடங்குத் தீர்வுகளை $f(x)\ f'(x)$ என்பவற்றின் மீப்பெரு பொது மடங்கையிலிருந்து காணலாம்.

$f(x) = 0$-ன் சம தீர்வுகள் காணப் பின்வரும் முறையைக் கையாளலாம்.

(1) $f'(x)$ காண்க,

(2) $f(x), f'(x)$ என்பவற்றின் மீப்பெரு பொது மடங்கைக் காண்க.

(3) மீப்பெரு பொது மடங்கையின் தீர்வுகளைக் காண்க ஒவ்வொரு தீர்வும் மீப்பெரு பொது மடங்கையில் வரும் தடவையினும் ஒரு தடவை கூடுதலாக $f(x)$-ல் வரும்.

பயிற்சி 4.

$x^4-9x^2+4x+12=0$ என்ற சமன்பாட்டின் சம தீர்வுகளைக் காண்க.

$$f(x)=x^4-9x^2+4x+12$$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x + 4$$

$f(x), f'(x)$ என்பவற்றின் மீப்பெரு பொதுமடங்கை $x-2$ என்று எளிதிற் காணலாம்.

ஆகவே, $f(x)$-ன் சினை $(x-2)^2$ ஆகும்,

$f(x)$-ன் பிற சினைகளைக்காண $x^2 - 9x^4 + 4x + 12$ஐ $(x-2)^2$ ஆல் வகுத்தல் வேண்டும்.

$$f(x) = (x-2)^2 (x+1)(x+3)$$

பயிற்சிகள் 20.

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைச் சம தீர்வுகளைக் கண்டு விடுவி

(1) $x^3 + x^2 - 16x + 20 = 0$

(2) $x^5 - 10x^2 + 15x - 6 = 0$

(3) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = 0$

(4) $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$

(5) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 0$

(6) $4x^5 - 16x^2 - 19x - 5 = 0$

2. அடியில் வரும் வளைவரைகள் x ஆயத்தை தொடுவனத் என்று நிறுவி, அவை தொடும் இடங்களையும் காண்க.

(1) $y = x^4 - 6x^3 + 9x^3 + 4x - 12$

(2) $y = x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x - 2$

(3) $y = 8x^3 - 44x^2 + 78x - 45$

3. $f(x) + 0$-ன் தீர்வுகள் $a, b, c, \ldots$ ஆயின்,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$ என்று நிறுவுக.

$f(x) = 0$ சமன்பாட்டில் ஒரு தீர்வு r தடவை வரின் அது $f'(x) = 0$ சமன்பாட்டில் $r - 1$ தடவை வரும் என நிறுவுக.

$4x^5 + 15x^4 - 40x^3 + 48 = 0$ ஐ விடுவி

4. $x^n + p'x^{n-1} + p'x^{n-1} + \ldots\ldots + p^{n-1}x + p^n = 0$ சமன்பாட்டில் a இரு தடவை தீர்வாக வரின், அது $p_1 x^{n-1} + 2p_2 x^{n-2} + 3p_3 x^{n-3} + \ldots\ldots + np_n = 0$ வின் தீர்வு என நிறுவுக.

5. அடியில் வரும் சமன்பாடுகளின் இயல்புத் தீர்வுகள் எம் மதிப்புகளுக்கு இடையில் உள்ளன என்று காண்க.

(1) $x^3 - 6x^2 + 2 = 0$

(2) $x^4 - 18x^2 + 12 = 0$

(3) $x^3 - 12x^2 + 36x - 10 = 0$

(4) $2x^3 - 3x^2 - 36x - 5 = 0$

(5) $x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 10 = 0$

(6) $x^4 - 8x^3 + 22x - 24x + 12 = 0$

6. $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 7 = 0$வின் தீர்வுகள் எத்தன்மையன என்று காண்க.

7. $x^3 + px + q = 0$ இரு சமதீர்வுகளை உடையதாயின், p, q எக் கட்டுப்பாட்டுக்குள் இருத்தல் வேண்டும்?

8. (1) $4x^3 - 21x^2 + 18x + 20 = 0$

(2) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் எத்தன்மையன என்று காண்க.

69. அண்ணளவைக் காட்டும் நியூட்டன் விதி (Newton's method of approximation)

ஒரு சமன்பாட்டுத் தீர்வின் அண்ணளவு மதிப்புப் தெரியின் இம் முறையால் அண்ணளவையினும் நெருங்கிய அணிமையைக் காணலாம். இம் முறையை முதலில் பயன்படுத்தியவர் நியூட்டன் என்பவராவார்.

$f(x) = 0$-ன் தீர்வு a என்றும், அதன் அண்ணளவு α என்றும் கொள்வோம்.

$\alpha = a + h$. இங்கு h-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாகும். இடைமதிப்புத் தேற்றப்படி.

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h) \text{ இங்கு } 0 < \theta < 1$$

$f(x) = 0$-ன் தீர்வு $a + h$ ஆதலின், $f(a + h) = 0$

$$\therefore \quad 0 = f(a) + hf' a + \theta h)$$

$$\therefore \quad h = -\frac{f(a)}{f'(a+\theta h)}$$

$$= -\frac{f(a)}{f'(a)} \text{ அண்ணளவாக.}$$

$$\therefore \alpha = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \text{ அண்ணளவாக.}$$

பயிற்சி 5.

$x^3-2x-5=0$-ன் மிகைத் தீர்வின் அண்ணளவு மதிப்பைக் காண்க.

$f(x) = x^3 - 2x - 5$ என்று கொள்வோம். x-க்கு மதிப்பு பல கொடுத்து, அதற்கு எதிர் நிலையாய $f(x)$-ன் மதிப்பினைக் காணின், அது $f(x)=0$-ன் தீர்வுகள் எவ்வெண்களுக்கு இடையே உள்ளன என்பதைக் காட்டும்.

$$f(2) = 2^3 - 2 \times 2 - 5 = -1$$

$$f(3) = 3^3 - 2 \times 3 - 5 = 16$$

ஆகவே, $f(x) = 0$ வின் தீர்வு 2-க்கும் 3-க்கும் இடையே இருக்கும். அதனை $2 + h$ என்று கொள்வோம்.

$$h = -\frac{f(2)}{f'(2)} \text{ அண்ணளவாக.}$$

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \qquad f(2) = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \qquad f'(2) = 10$$

$$\therefore h = \frac{1}{10} = .1$$

ஆகவே, தீர்வின் முதல் அண்ணளவு = 2·1 சமன்பாட்டுத் தீர்வாக $2{\cdot}1 + h$ இருப்பின்.

$$h = -\frac{f(2{\cdot}1)}{f'(2{\cdot}1)} \text{ அண்ணளவாக.}$$

$$= -\frac{{\cdot}061}{11{\cdot}23} = -{\cdot}00543$$

ஆகவே, தீர்வுடைய அண்ணளவின் நெருங்கிய அணிமை

$$= 2{\cdot}1 - {\cdot}00543$$

$$= 2{\cdot}0946$$

பயிற்சி 6.

$\sin x = a x$ என்ற சமன்பாட்டுத் தீர்வின் அண்ணளவு π என்று கொண்டு, அதனுல் அவ்வளவின் நெருங்கிய அணிமை $\pi(1 - \alpha + a^2)$ என நிறுவுக. இங்கு α மிகச் சிறிய மதிப்புடையது.

$$f(x) = \sin x - ax$$

$$f'(x) = \cos x - a$$

$$\therefore \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\sin x - ax}{\cos x - a}$$

$$h = -\frac{f(\pi)}{f'(\pi)} = -\frac{\sin \pi - a\pi}{\cos \pi - a} = -\frac{a\pi}{1 + a}$$

$$= -\alpha\pi(1 + \alpha)^{-1}$$

$$= -\alpha\pi(1 - \alpha + \cdot \quad . \quad . \quad . \quad .)$$

$= -\alpha\pi + \alpha^2\pi$ அண்ணளவாக.

ஆகவே, தீர்வின் அண்ணளவு $= \pi + \pi\alpha - \pi\alpha^2$

$$= \pi(1 + \alpha - \alpha)$$

பயிற்சிகள் 21.

1. $x^3 - 4x^2 - 7x + 24 = 0$ சமன்பாட்டின் 2-க்கும் 3-க்கும் இடைப்பட்ட தீர்வைக் காண்க.

2. $x^4 - 12x^2 - 12x - 3.\ 0$ வின் தீர்வின் அண்ணளவு 4 ஆகும்; அத் தீர்வின் மதிப்பை 2 பதின் இடங்களுக்கு அணித்ததாகக் கணக்கிடுக.

3. $x^4 - 12x + 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகைத் தீர்வைக் காண்க.

4. $x^3 - 8x - 40 = 0.$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகைத் தீர்வை 2 பதின் இடங்களுக்கு அணித்ததாகக் காண்க.

5. $x^3 + 3x - 7 = 0.$ சமன்பாட்டுக்கு இயல்புத் தீர்வு ஒன்றுதான் உண்டு என்று நிறுவுக. அத் தீர்வின் அண்ணளவு என்ன?

6. வாய்பாட்டினைப் பயன்படுத்தாது $\sin(30° + \theta) = \cdot 51$ எனின், $\theta = 40'$ அண்ணளவாகும் என்று நிறுவுக.

7. 800 கன அடி நீர் கொள்ளும் கன சதுர வடிவுடைய ஒரு நீர்க்கலம் கட்டுவதற்கு அதன் நீளத்தின் அண்ணளவு என்ன?

70. தேரப்பெரு வகைகள் (Indeterminate forms)

a ஐ x நெருங்கின் $\text{Lt}\,\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)\text{-ன் எல்லை}}{F(x)\text{-ன் எல்லை}}$. ஆனால், (x), $F(x)$ என்பவற்றின் எல்லைகள் இரண்டும் சுன்னமாகவோ, முடிவில் எண்ணாகவோ இருப்பின், $\frac{f(x)}{F(x)}$-ன் எல்லை, பொருளில் மதிப்பான $\frac{0}{0}$ அல்லது $\frac{\infty}{\infty}$ ஆகும். இவ் வகைகள் தேரப்பெரு வகைகள் (indeterminate forms) எனப்படும். தேரப்பெரு வகைகளுள் மற்றவை:

$0 \times \infty, \quad = -\infty, \quad 0^0, \quad 1 \times \infty, \quad \infty^0.$

இவற்றின் மதிப்புகளைக் காணும் முறைகள் இனிச் சொல்லப்படும்.

71. தேரப்பெரு வகை $\frac{0}{0}$

$\frac{\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ f(x)}{F(x)} = \frac{f(a)}{F(a)}$ இங்கு $f(a)$, $F(a)$ என்பவற்றின் மதிப்பு சுன்னமாகின்,

$$\frac{\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ f(x)}{F(x)} = \frac{0}{0.}$$

ஆகவே, $\frac{0}{0}$ என்ற தேரப்பெரு வகை வரும்.

$x = a + h$ என்று கொள்வோம்.

a ஐ x நெருங்கும்பொழுது சுன்னத்தை h நெருங்கும்

$$\frac{\underset{x \to a}{\text{Lt}}\ f(x)}{F(x)} = \underset{a+h \to a}{\text{Lt}}\ \frac{f(a+h)}{F(a+h)}$$

இடை மதிப்புத் தேற்றப்படி $f(a+h)$, $F(a+h)$ என்பவற்றை விரிப்பின்,

$$\operatorname*{Lt}_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \operatorname*{Lt}_{h \to 0} \frac{f(a) + h f^1(a+\theta_1 h)}{F(a) + h F^1(a+\theta_2 h)}$$

$f(a) = 0;\ F(a) = 0$ ஆதலின்,

$$\operatorname*{Lt}_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \operatorname*{Lt}_{h \to 0} \frac{(f'(a+\theta h)}{(F'(a+\theta_2 h)} = \frac{f^1(a)}{F^1(a)}$$

இங்கும் $f^1(a) = 0$, $F^1(a) = 0$ என்றிருப்பின்,

$$\frac{f^1(a)}{F^1(a)} = \operatorname*{Lt}_{x \to a} \frac{f^1(x)}{F^1(x)} = \operatorname*{Lt}_{x \to a} \frac{f''(x)}{F''(x)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}$$

இவ்விடத்தும் $f''(0)$, $F''(0)$ என்றிருப்பின்

$$\operatorname*{Lt}_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f''^1(a)}{F''^1(a)}$$

தேரப்பெரு வகை மாறும் வரை இம் முறையைக் கையாளல் வேண்டும்.

பயிற்சி 7.

$$\operatorname*{Lt}_{x \to 0} \frac{\sin 2x + 2\sin^2 x - 2\sin x}{\cos^2 x - \cos x} \text{ காண்க.}$$

$$\operatorname*{Lt}_{x \to 0} \frac{\sin 2x + 2\sin x - 2\sin x}{\cos x - \cos^2 x} \quad \text{வகை } \frac{0}{0}$$

$$= \operatorname*{Lt}_{x \to 0} \frac{2\cos 2x + 4\sin x\cos x - 2\cos x}{-\sin x + 2\cos x - 2\sin x} \quad ,, \frac{0}{0}$$

$$= \operatorname*{Lt}_{x \to 0} \frac{-4\sin 2x + 4\cos x - 4\sin x + 2\sin x}{-\cos x + 2\cos x\sin^2 x}$$

$$= \frac{0 + 4 - 0 + 0}{-1 + 2 - 0}$$

$$= 4$$

பயிற்சி 8.

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \log (1+x)}{\log (1+\sin x)} \text{ காண்க.}$$

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \log (1+x)}{\log (1+\sin x)} \text{ காண்க.}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\cos \log (1+x)}{1+x} \div \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\cos \log (1+x)}{1+x} \cdot \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$= 1.$

பயிற்சிகள் 22.

அடியில் வருவனவற்றிற்கு எல்லை காண்க.

1. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \dfrac{1-x}{\log x}$

2. $\underset{x \to \pi}{\text{Lt}} \dfrac{x \cos x+\pi}{\sin x}$

3. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

4. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

5. $\underset{x \to 4}{\text{Lt}} \dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$

6. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

7. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin 2x}{0}$

8. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^x+\sin x-1}{\log (1+x)}$

9. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \dfrac{\log x^2}{2(x^2-1)}$

10. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\log (1+ax)}{\log (1+bx)}$

11. $\underset{x \to 4}{\text{Lt}\ \pi} \dfrac{\sec^2 \theta - \tan \theta}{1+\cos 4\theta}$

12. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}$

13. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\log (1+k x^2)}{1-\cos x}$

14. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \dfrac{1-x+\log x}{3-(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

15. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^x+\log \frac{1-2}{e}}{\tan x - x}$

16. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

17. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^x-1+\log (1-x)}{\sin^2 x}$

18. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin x - \log (1+x) - x^3 e^x}{x^3}$

19. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^{3x}+e^{-3x}-2}{5x^2}$

20. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \dfrac{x^x-x}{1-x+\log x}$

72. தேரப்பெறாத வகை $\frac{\infty}{\infty}$

$\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) = \infty$ என்றும், $\underset{x \to a}{\text{Lt}} F(x) = \infty$ என்றும் கொள்வோம்.

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{F(x)} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \text{ வகை } \frac{0}{0}$$

$$= \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{\frac{-F'(x)}{\{F(x)\}^2}}{\frac{-f'(x)}{\{f(x)\}^2}}$$

$$= \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{F'(x)}{\{F(x)\}^2} \times \frac{\{f(x)\}^2}{f'(x)}$$

$$= \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{F'(x)}{f'(x)} \left\{ \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{F(x)} \right\}^2$$

$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{F(x)} = K$ என்று கொள்வோம்.

வகை 1 : $K \neq 0$ $\qquad K \neq \infty$

$$\therefore \quad K = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{F^2(x)}{f'(x)} K^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{K} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{F'(x)}{f'(x)}$$

ஆகவே, $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{F(x)} = K = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

வகை 2 : $K = \infty$

$$K = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{F(x)}$$

$$K + 1 = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{F(x)} + 1 = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x) + F(x)}{F(x)}$$

$$= \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \frac{f^1(x) + F^1(x)}{F^1(x)}$$ முதல் வகைப்படி.

$$= \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \frac{f^1(x)}{F^1(x)} + 1$$

$$K = \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \frac{f^1(x)}{F^1(x)}$$

வகை 3.

$$K = \infty$$

இங்கு $\dfrac{1}{\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \dfrac{f(x)}{F(x)}} = \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \dfrac{F(x)}{f(x)}$

$$= \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \frac{F^1(x)}{f^1(x)}$$ இரண்டாவது வகைப்படி,

$$\therefore \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x)}{F(x)} = \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \frac{f^1(x)}{F^1(x)}$$

ஆகவே, எல்லா வகையிலும்

$$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x)}{F(x)} = \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \frac{f^1(x)}{F^1(x)}$$

இவ் வகையைச் சார்ந்த கீழ்க்கண்ட பயிற்சிகளை, முதல் அடிக்குப்பின் $\frac{0}{0}$ என்ற வகைக்குக் கொள்வது நல்லது; சில சமயங்களில் பின்ன மேல்பாகந்து வகைக்கெழுவும், கீழ்ப் பாகத்து வகைக்கெழுவும் கண்டு போவது ஒரு முடிவில் நில்லாதாகலின், எடுத்துக்காட்டாகப் பின்ன மேல்பாகத்திலோ பின்ன கீழ்ப்பாகத்திலோ $\frac{1}{K}$ அடங்கிய உறுப்புகள் இரும்பின், அவற்றின் தொடர் வகைக்கெழுவும் $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \ldots\ldots$ என்பவை அடங்கிய உறுப்புகளாகும். $x \to 0$ ஆயின், இவ் உறுப்புகளின் எல்லை எண்ணிலியாகும். இம் முறையே விடாது எத்துணை முறை இதனைச் செய்துகொண்டிருப்பினும், விடை காணவியலாது. ஆகவே, $\frac{0}{0}$ வகைக்குக் கூடிய விரைவில் மாற்றிக்கொள்ளுதல் நன்று.

பயிற்சி 9.

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\operatorname{cosec} x}{\log x} \text{ காண்க.}$$

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\log x}{\operatorname{cosec} x} \quad \text{வகை } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cot x}$$

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} - \frac{\sin^2 x}{x \cos x} \quad \text{வகை } \frac{0}{0}$$

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{-2 \sin x \cos}{\cos x - \sin x}$$

$$= 0$$

பயிற்சி 10.

$$\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2}{ex^2} \text{ காண்க.}$$

$$\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2}{ex^2} \quad \text{வகை } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{2x}{2x \cdot ex^2}$$

$$\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{ex^2} = 0.$$

பயிற்சிகள் 23.

கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க:

1. $\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{5x - 2}{3x + 4}$

2. $\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 5x -}$

3. $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\log x}{\cot x}$

4. $\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{\cot 2x}{\cot x}$

5. $\underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} \frac{\log (1-x)}{\cot \pi x}$

6. $\underset{x \to \frac{1}{2}}{\mathrm{Lt}} \frac{\sec \pi x}{\tan 3\pi x}$

7. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\log \sin 2x}{\log \sin x}$

9. $\underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{x \cos \frac{1}{x}}{x+1}$

8. $\underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \dfrac{\log\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\tan x}$

10. $\underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{e^x}{x^s}$

73. தேரப் பெருவகை $0 \times \infty$

$\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x) = 0$ என்றும், $\underset{x\to a}{\text{Lt}} F(x) + \infty$ என்றும் கொள்வோம்.

அப்பொழுது Lt $f(x)$-க்கு $0 \times \infty$ என்ற தேரப் பெரு மதிப்பு வரும்.

$f(x). F(x)$ ஐ, $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}$ என்றோ, $\dfrac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ என்றோ

எழுதின், $\dfrac{0}{0}$ அல்லது, $\dfrac{\infty}{\infty}$ வகைகள் வரும்.

பயிற்சி 11.

$\underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}}$ sec $3x$. cos $5x$ காண்க.

$\underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}}$ sec $3x$. cos $5x$ வகை $\infty \times 0$

$= \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$ வகை $\dfrac{0}{0}$

$= \underset{x\to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \dfrac{-5 \sin 5x}{-3 \sin 3x}$

$= -5/3.$

பயிற்சி 12.

$\underset{x\to 0}{\text{Lt}}$ tan x log x காண்க.

$\underset{x\to 0}{\text{Lt}}$ tan x. log x வகை $0 \times \infty$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\log x}{\cot x} \qquad \text{வகை } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} -\frac{\sin^2 x}{x} \qquad \text{வகை } \frac{0}{0}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{-2 \sin x \cos x}{1}$$

$$= 0.$$

74. நேரப்பெரு வகை $\infty - \infty$

இவ்வகையை $\frac{0}{0}$ அல்லது, $\frac{\infty}{\infty}$ வகைகளாக எளிதில் மாற்றலாம்.

பயிற்சி 13.

$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$ காண்க.

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \text{ வகை } \infty - \infty$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x}$$

$$\text{வகை } \frac{0}{0}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\cos x - \cos x + \sin x}{\sin x + x \cos x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \qquad \text{வகை } \frac{0}{0}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x - x \sin x + \cos x}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$= 0.$$

பயிற்சிகள் 24.

பின் வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க:

1. $\underset{x \to n}{\text{Lt}} \; (x - n) \cot \pi x$

2. $\underset{x \to n}{\text{Lt}} \; (x - n) \operatorname{cosec} \pi x.$

3. $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; \log \left(2 - \frac{x}{a}\right) \cot (x - a)$

4. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \; \tan^2 \left(\frac{\pi}{2} x^2\right)(1 + \sec \pi x)$

5. $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \; x \tan \frac{1}{x}$

6. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; x \log x$

7. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \; (\sec x - \tan x)$

8. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$

9. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \left(\tan x - \frac{2 x \sec x}{\pi}\right)$

10. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \left(x \tan x - \frac{\pi}{2} \sec x\right)$

11. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{\frac{1}{x} - \frac{\log (1 + x)}{x^2}\right\}$

12. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \left(\sec x - \frac{1}{1 - \sin x}\right)$

75. தேரப்பெரு வகைகள் 0^0, 1^∞, ∞^0 ...

$$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \left\{ f(x) \right\}^{F(x)} \text{ காணும்முறை}$$

இங்கு $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x) = 0$, $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} F(x) = 0$ எனின், 0^0 என்றும்

$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x) = 1$, $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} F(x) = \infty$ 1^∞ என்றும்

வரும்.

வரும். $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x) = \infty$, $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} F(x) = 0$,, ∞^0 என்றும்

$y = f(x)^{F(x)}$ எனக்கொள்வோம்.

இரு புறத்தும் மடக்கை எடுப்பின்,

$$\log y = F(x) \log f(x)$$

ஆகவே, $\log y = 0 \times \log 0 = 0 \times -\infty$

அல்லது, $\log y = \infty \times \log 1 = \infty \times 0$

அல்லது, $\log y = 0 \times \log \infty = 0 \times \infty$

$\log y$-ன் மதிப்பு $0 \times \infty$ என்ற தேரப்பெரு வகையினுல் காணலாம். இதனுல், y-ன் மதிப்பு காண்பது எளிது.

பயிற்சி 14.

$$\underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathrm{Lt}} \left(\tan x \right)^{\tan 2x} \quad \text{காண்க.}$$

$$y = \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathrm{Lt}} \left(\tan x \right)^{\tan 2x} \quad \text{எனக் கொள்வோம்.}$$

வகை 1^∞

$$\therefore \quad \log y_0 = \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathrm{Lt}} \tan 2x \cdot \log (\tan x) \qquad \text{வகை } \infty \times 0$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathrm{Lt}} \frac{\log (\tan x)}{\cot 2x} \qquad \text{வகை } \frac{0}{0}$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathrm{Lt}} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-2\,\mathrm{cosec}^2\, 2x}$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathrm{Lt}} \frac{-\sin^2 2x}{\tan x \cos^2 x}$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathrm{Lt}} -2 \sin x \cos x$$

$$= -1$$

$$\therefore\ y = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

பயிற்சி 15.

$$\underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} (1 - x^2)^{\frac{1}{\log (1 - x)}}$$ காண்க.

$$y = \underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} (1 - x^2)^{\frac{1}{\log (1 - x)}}$$ வகை 0^0

$$\log y = \underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} \frac{\log (1 - x^2)}{\log (1 - x)}$$ வகை $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} \frac{1 - x}{1 - x^2} \frac{(-2x)}{(-1)}$$

$$= \underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} \frac{2x}{1 + x}$$

$$= 1$$

$$y = e$$

பயிற்சி 16.

$$\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} (1 + x^2)^{e^{-x}}$$ காண்க.

$$y = \underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} (1 + x^2)^{e^{-x}}$$ வகை ∞^0

$$\log y = \underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \; e^{-x} \log(1+x^2) \text{ வகை } 0 \times \infty$$

$$= \underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \frac{\log(1+x^2)}{ex} \text{ வகை } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \frac{2x}{ex(1+x^2)} \text{ வகை } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \frac{2}{ex\,2x + ex(1+x^2)}$$

$$= 0$$

$$y = e^0 = 1$$

பயிற்சிகள் 25.

கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

1. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; x^x$

2. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \; (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$

3. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; (\cos x)^{\frac{2}{\operatorname{cosec} x}}$

4. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; (\cos x)^{\frac{2}{\cot x}}$

5. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\log(1-x)}$

6. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{x}{e^x \; 1}\right)^{\frac{1}{x}}$

7. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; (\cos a x)^{\frac{1}{x^2}}$

8. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1-x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$

9. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; (\cos a x)^{\frac{1}{x}}$

10. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

11. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \; (\sin x)^{2 \tan x}$

12. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \; x^1 - \frac{3}{x}$

13. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$

14. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

15. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

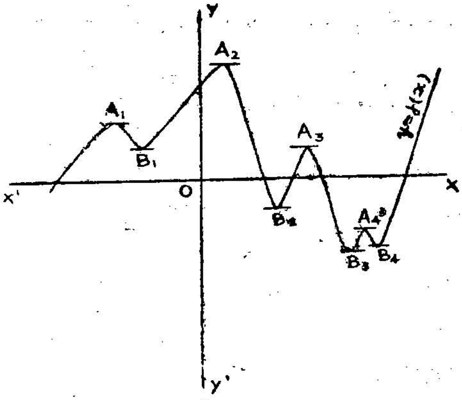
6. மீப்பெரு மதிப்பும் மீச்சிறு மதிப்பும்

(Maxima and Minima)

76. ஒரு சார்பும், அதன் வகைக்கெழுவும் தொடர்ச்சி உடையனவாக இருப்பின், சார்பின் மீப்பெரு மதிப்புகளும் மீச்சிறு மதிப்புகளும் காணும் முறையினை இப் பகுதியில் ஆராய்வோம். முதலாவதாக மீப்பெரு மதிப்பு என்றால் என்ன? மீச்சிறு மதிப்பு என்றால் என்ன? என அறிதல் வேண்டும் ஆதலின் ஒரு சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பினையும், மீச்சிறு மதிப்பினையும் முதற்கண் வரையறுப்போம்.

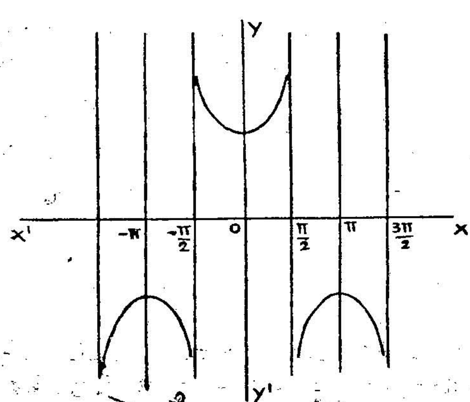
தொடருடைச் சார்பு ஒரு மதிப்பு வரை கூடி வந்து பின்னர்க் குறையுமாயின் அம் மதிப்பு சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு என்று கூறப்படும். அதுபோல ஒரு சார்பு ஒரு மதிப்பு வரை குறைந்து வந்து பின்னர்க் கூடுமாயின் அம் மதிப்பு மீச்சிறு மதிப்பு எனப்படும். அஃதாவது, மீப்பெரு மதிப்பும், மீச்சிறு மதிப்பும் தத்தம் அண்மையிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளையும்விட முறையே பெரியதாகவும், சிறியதாகவும் உள்ளன என்பது கருத்து. எடுத்துக்காட்டாக, $f(x)$ என்று சார்பை ஆராய்வோம். a-க்கு அண்மையிலுள்ள x-ன் மதிப்புகளுக்கு எதிர் நிலையான $f(x)$-ன் மதிப்புகளைக் காட்டிலும் $f(a)$ பெரியதாயின், அது $f(x)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பாகும். ஆகவே, $f(x)$, $x=a$ என்ற இடத்தில் மீப்பெரு மதிப்பை அடைகின்றது. இதனைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம். $(a-h, a+h)$ வீச்சிலுள்ள x-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $f(a)$ ஆகும். இங்கு h-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியது. இது போன்றே மீச்சிறு மதிப்பையும் வரையறுக்கலாம்.

பின்வரும் படத்தில் A புள்ளிகள் மீப்பெரு மதிப்புகளையும், B புள்ளிகள் மீச்சிறு மதிப்புகளையும் குறிப்பிடுகின்றன. இவ் வளைவரையில் பின்வரும் உண்மைகள் புலனுகும் :



படம்-11

ஒரு சார்புக்கு மீப்பெரு மதிப்புகளும், மீச்சிறு மதிப்புகளும் பல இருக்கலாம். மீப்பெரு மதிப்பு சார்பின் மிகக் கூடிய மதிப்பு என்ருே, மீச்சிறு மதிப்பு சார்பின் மிகக் குறைந்த மதிப்பு என்ருே சொல்லுவதற்கில்லை. சில மீச்சிறு மதிப்புகள், சில மீப்பெரு மதிப்புகளினும் கூடுதலாக இருக்கவும் செய்யலாம். மீப்பெரு மதிப்புகளும், மீச்சிறு மதிப்புகளும் தம்முள் ஒன்றன் பின் ஒன்ருக வருகின்றன. அஃதாவது மீப்பெரு மதிப்பு இரண்டிற்கிடையில் ஒரு மீச்சிறு மதிப்பும், மீச்சிறு மதிப்பு இரண்டினுக் கிடையில் ஒரு மீப்பெரு மதிப்பும் வரும் என்பது கருத்து



படம்-12

இவற்றை y sec x என்ற சார்பினல் விளக்குவோம். $-\frac{\pi}{2}$ -லிருந்து 0-க்கு x கூடுகையில் ∞-லிருந்து 1-க்கு sec x குறைகிறது; 0-லிருந்து $\frac{\pi}{2}$ -க்கு x கூடுகையில் 1-லிருந்து ∞-க்கு sec x கூடுகிறது. ஆகவே, sec x-ன் மீச்சிறு மதிப்பு 1 ஆகும். $\frac{\pi}{2}$ -லிருந்து π-க்கு x கூடுகையில்

-∞-லிருந்து —1-க்கு sec x கூடுகிறது; π-ல் இருந்து $\frac{3}{2}$ π-க்கு x கூடுகையில் — 1 லிருந்து — ∞-க்கு sec x குறைகிறது. ஆகவே sec x-ன் மீப்பெரு மதிப்பு — 1.

இங்கு மீப்பெரு மதிப்பைவிட மீச்சிறு மதிப்பு பெரிதாக இருப்பது கருதத் தக்கது.

77. தேற்றம் 1.

$f(x)$ மீப்பெரு மதிப்பையோ மீச்சிறு மதிப்பையோ அடையுங்கால் x-ன் மதிப்பு a ஆயின் $f'(a) = 0$.

$f(x)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பாக $f(a)$ இருப்பின், $a-h$-லிருந்து a-க்கு x கூடும்பொழுது, $f(x)$-ன் மதிப்பும் கூடிக்கொண்டே வருகிறது. (அதாவது, $a - h$, a)வீச்சில் $f(x)$ ஒரு கூடுஞ் சார்பு ஆகவே, $(a - h, a)$-ல் $f'(x)$ மிகையாகும்.

ஆனல், a-லிருந்து $a+h$-க்கு x கூடும்பொழுது $f(x)$-ன் மதிப்பு குறைந்துகொண்டே வருகிறது. அதாவது $(a, a+h)$ வீச்சில் ஒரு குறையுஞ் சார்பு, ஆகவே, $(a, a+h)$-ல் $f'(x)$-ன் மதிப்பு குறையாகும்.

$(a - h)$-ல் இருந்து, $(h+a)$-க்கு a வழியாக x-ன் மதிப்பு கூடுங் கால் $f'(x)$-ன் மதிப்பு மிகையிலிருந்து குறையாக மாறுகிறது இவ்விதம் மாறின் $f(x)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $f(a)$ ஆகும்.

இவ்விதமே a வழியாக x-ன் மதிப்பு கூடும்பொழுது $f'(x)$-ன் மதிப்பு குறையிலிருந்து மிகையாக மாறினல் $f(x)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $f(x)$ ஆகும்.

ஒரு தொடருடைச் சார்பின் குறி மாறும் இடத்து அதன் மதிப்பு சுன்னமாகும். இங்கே $f'(x)$ ஒரு தொடருடைச் சார்பாதலின் $f'(a) = 0$.

78. தேற்றம் 2.

$f'(a)=0$ ஆகவும், $f''(a)=0$ ஆகவும் இருப்பின், மீப்பெரு மதிப்பையும், $f'(a)=0$ ஆகவும் $f''(a) > 0$ ஆகவும் இருப்பின் மீச்சிறு மதிப்பையும் a-ல் $f(x)$ அடைகின்றது.

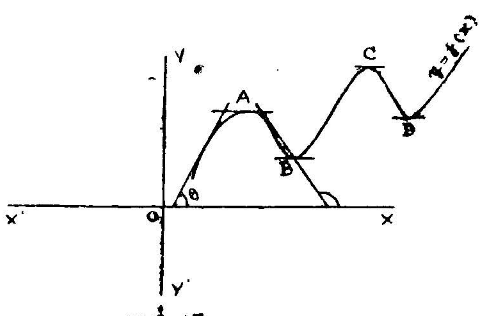
$f(x)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $f(a)$ ஆகின் a வழியாக x கூடுங் கால் மிகையிலிருந்து குறைக்கு $f'(x)$ மாறும் என்று முந்திய தேற்றத்திற் பார்த்தோம். ஆகவே, a-வுக்கு அருகில் $f'(x)$ ஒரு குறையுஞ்சார்பு. அதனுல் அதன் வகைக்கெழுவான $f''(x)$ a-க்கு அருகில் குறை மதிப்புடையது ஆதல் வேண்டும். ஆனுல், $f''(a) \neq 0$ ஆக இருப்பதால் $f''(x)$, $f''(a)$ என்பவை ஓரே குறியைப் பொறுத்திருக்கின்றன. ஆகவே, $f(x)$ a இடத்து மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுங்கால் $f''(a)$-ன் மதிப்பு குறையாகும்.

இவ்வாறே $f(x)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $f(a)$ ஆகுங்கால் $f''(a)$-ன் மதிப்பு மிகையாகும் என்று எளிதிற் காணலாம்.

79. $f(x), f'(x)$ தொடருடைச் சார்புகளின் $f(x)$-ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைக் காணும் விதி.

$f'(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தீர்வுகள் x-ன் மதிப்புகளாக இருப்பின் அவ்விடத்து $f(x)$ மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பினை அடைகிறது. aஐ $f'(x)=0$-ன் தீர்வுகளுள் ஒன்றெனக் கொள்வோம். $f''(x)$ கண்டு அங்கு x-க்குப் பதில் aஐ ஈடாக்குக. $f''(a)$ குறை மதிப்புடையதாயின் $f(x)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $f(a)$; $f''(a)$ மிகை மதிப்புடையதாயின், $f(x)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $f(a)$. $f''(a)=0$ ஆயின், a-ல் $f(x)$ மீப்பெரு மதிப்பையோ, மீச்சிறு மதிப்பையோ அடைவதில்லை.

80. வடிவக் கணிதத்தால் இத் தேற்றங்களுக்குத் தெரிப்பு



படம். 13

இப் படத்திலுள்ள வளைவரையில் A, C என்பவற்றின் குத்தாயங்கள் (ordinates) சார்பின் மீப்பெரு மதிப்புகளையும், B, D என்பவற்றின் குத்தாயங்கள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்புகளையும் குறிப்பிடுகின்றன.

(x, y) புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை x ஆயத்தோடு கோணம் θ-வைப் பிறப்பித்தால் $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$ என்று கண்டோம்.

A, B, C, D என்ற புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் x ஆயத்தோடு ஒருபோகுக் கோடுகளாக உள்ளன.

ஆகவே, $\theta = 0$

$\tan\theta = 0$

அஃதாவது $\frac{dy}{dx} = 0$

A, C என்பவற்றின் பின் θ ஒரு குறுங்கோணம்.

$\therefore\ \tan\theta = +$ அஃதாவது $\frac{dy}{dx} = +$

A, C என்பவற்றின் பின் θ ஒரு விரிகோணம்,

$\tan\theta = -1$ அஃதாவது $\frac{dy}{dx} = -$

ஆகவே, ஒரு மீப்பெரு மதிப்பைக் கடந்து செல்லும் போது $\frac{dy}{dx}$-ன் குறி மிகையிலிருந்து குறையாக மாறும். இவ்வண்ணமே, ஒரு மீச்சிறு மதிப்பைக் கடக்கையில் $\frac{dy}{dx}$-ன் குறி குறையிலிருந்து மிகையாக மாறும். இதனால், $\frac{d^2y}{dx^2}$ குறையாக இருப்பின், மீப்பெரு மதிப்பும் மிகையாக இருப்பின், மீச்சிறு மதிப்பும் வரும் என்று இம் முறையாலும் நிறுவலாம்.

81. மற்றும் ஒரு நெறிப்பு: இத் தேற்றங்களை இடைமதிப்புத் தேற்றத்தினாலும் நிறுவுதல் முடியும். பொதுப்படை இடைமதிப்புத் தேற்றப்படி

$$f(x+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h)$$

இங்கு $0 < \theta < 1$

$$f(a+h) - f(a) = h\left[f'(a) + \frac{h}{2!} f''(a) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^n(a+\theta h)\right]$$

இச் சமன்பாட்டில் இடப் பக்கத் தொடர்பு

$f'(a) + \frac{h}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^n(a + \theta h)$-ம் $f'(a)$-ம் மிகச்சிறு மதிப்புடையதாயின் ஒரே குறியைப் பெறும்.

ஆகவே $f(a+h) - f(a)$-ன் குறியும், $hf'(a)$-ன் குறியும் ஒன்றே. h-ன் குறியைப் பொறுத்து $hf'(a)$ குறி அமைவதாகும். அஃதாவது h மிகையாகுங்கால் $h f'(a)$ பெறுங்குறியும், h குறையுங்கால் அது பெறுங்குறியும் தம்முள் வேறுபாடுடையன. மாற்றம் h-ன் குறி மாறுதலைப் பொறுத்தது என அறியலாம். $f(x)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $f(a)$ ஆயின், h-ன் சிறு மதிப்புகளுக்கு $f(a) > f(a+h)$.

h-ன் குறி எதுவாயினும் $f(a+h) - f(a) = -$ இவ்விதமே மீச்சிறு மதிப்புக்கு $f(a+h) - f(a) = +$ ஆகவே, மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகளுக்கு h-ன் குறிமாறினும் $f(a+h) - f(a)$-ன் குறி மாறுதலில்லை. $f(a+h) - f(a)$-ன் குறியும், $h\ f'(a)$-ன் குறியும் ஒன்றேயாதலால் $f'(a) = 0$.

$f'(a) = 0$ என்றிருப்பின்,

$$f(a+h) - f(a) = h^2\left[\frac{f''(a)}{2!} + \frac{h}{3!} f'''(a) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^n(a+\theta h)\right]$$

h^2 எப்பொழுதும் மிகையாதலின் இடப்பக்கத்துத் தொடரின் குறி $f''(a)$-ன் குறியைச் சார்ந்து நிற்கிறது. ஆகவே, $f''(a)$ குறைக் குறி ஆயின், $f(a+h) - f(a)$-ம் குறைக் குறியாகும். $f''(a)$ மிகைக் குறியாயின், $f(a+h) - f(a)$ மிகைக் குறி ஆகும்.

$\therefore\ f''(a) < 0$ என்றால், $x = a$-ல் $f(x)$ மீப்பெரு மதிப்பைக் கொள்கிறது.

$f''(a) > 0$ எனின், $x = a$-ல் $f(x)$ மீச்சிறு மதிப்பைக் கொள்கிறது.

இங்கே $f(x), f'(x) \ldots\ldots\ldots f^{n}(x)$ என்பவை தொடர்ச்சியுடைச் சார்புகளாக இருந்தால்தான், இத்தெரிப்பு பொருந்தும்.

பயிற்சி 1

$2x^3 - 3x - 36x + 10$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பையும், மீச்சிறு மதிப்பையும் காண்க.

$f(x) - 2x^3 - 3x - 36x + 10$ என்று கொள்வோம். மீப்பெரு மதிப்பையோ, மீச்சிறு மதிப்பையோ $f(x)$ கொள்ளும் பொழுது $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$$
$$= 6(x - 3)(x + 2)$$

$\therefore\ x = 3, x = -2$ என்ற இடத்து $f(x)$-ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் வருகின்றன.

$f(x)$ x-ன் எம்மதிப்புக்கு மீப்பெரு மதிப்பைக் கொள்ளும்? எம்மதிப்புக்கு மீச்சிறு பதிப்பைக் கொள்ளும்? எனப் பார்ப்போம்.

$$f''(x) = 12x - 6$$
$$= 6(2x - 1)$$

$x = 3$ ஆயின். $f''(x) = 12x \times 3 \quad 6 = 30 = +$

$x = -2$ ஆயின், $f''(x) = 12 \times -2 - 6 = -30 = -$.

ஆகவே, $x = 3$ மீச்சிறு மதிப்பையும், $x = -2$ மீப்பெரு மதிப்பையும் தருகின்றன.

மீச்சிறு மதிப்பு $= f(3) = -71$

மீப்பெரு மதிப்பு $= f(-2) = 54$.

பயிற்சி 2.

x-ன் மிகை மதிப்புகளுக்கு $\frac{\log x}{x}$ -ன் மீப்பெரு மதிப்பு என்ன?

$$(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-3 + 2\log x}{x^3}$$

மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளுக்கு $f'(x) = 0$.

$\therefore \quad 1 - \log x = 0 \qquad\qquad \therefore \quad x = e$

$$f''(e) = \frac{-3 + 2\log e}{e^3} = -\frac{1}{e^3}.$$

$\therefore \quad x = e$ மீப்பெரு மதிப்பைத் தருகின்றது.

மீப்பெரு மதிப்பு $f(e) = \dfrac{1}{e}$.

பயிற்சி 3.

$a^2 \sec^2 x + b^2 \operatorname{cosec}^2 x$-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $(a+b)^2$ என்று நிறுவுக.

$$f(x) = a^2 \sec^2 x + b^2 \operatorname{cosec}^2 x$$

$$f'(x) = 2a \sec^2 x \tan x - 2b \operatorname{cosec}^2 x \cot x$$

$$= 2. \frac{a^2 \sin^4 x - b^2 \cos^4 x}{\cos^3 x \cdot \sin^3 x}$$

$$f''(x) = 2. \frac{4 \sin^4 x \cos^4 x (a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) - (a^2 \sin^4 x - b^2 \cos^4 x) \times \frac{d}{dx} (\cos^3 x \cdot \sin^3 x)}{\cos^6 x \cdot \sin^6 x}$$

மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளுக்கு $f'(x) = 0$

$$a^2 \sin^4 x - b^2 \cos^4 x = 0$$

அப்பொழுது, $f''(x) = \cdot 8 \, (a^2 \sec^2 x + b^2 \operatorname{cosec}^2 x) = +$

$\therefore \quad a^2 \sin^4 x - b^2 \cos^4 x = 0$ மீச்சிறு மதிப்பைத் தருகின்றது.

$$\therefore \tan^2 x = \frac{b^2}{a}.$$

$f(x)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $\tan^2 x = \frac{b}{a}$ என்றிருப்பின்

வரும்.

$$\therefore \quad f(x) = a^2 \sec^2 x + b^2 \operatorname{cosec}^2 x$$

$$= a^2 (1 + \tan^2 x) + b^2 (1 + \cot^2 x)$$

$$= a^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right) + b^2 \left(1 + \frac{a}{b}\right)$$

$$= (a + b)^2.$$

பயிற்சி 4.

x, y மிகை மதிப்பு உடையன. $x^2 + xy + y^2 + 3k^2$ என்றிருப்பின், $ax + by$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $2k\sqrt{a^2 - ab + b^2}$ என்று நிறுவுக.

$ax + by$ மீப்பெரு மதிப்பைக் கொண்டால் அதன் வகைக் கெழு சுன்னமாகும்.

$$\therefore a + b\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$x^2 + xy + y^2 = 3k^2$$

இச் சமன்பாட்டின் வகைக்கெழு காணின்,

$$(2x + y) + (x + 2y)\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ல் உள்ள $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்புகளைச் சமனுக்கின்,

$$= \frac{a}{b} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

$$\therefore y = \frac{a - 2b}{b - 2a} x \ldots\ldots (3)$$

சமன்பாடு (2)-ன் வகைக்கெழுவை மறுபடியும் காணின்,

$$2 + 2\frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x + 2y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ldots\ldots (4)$$

சமன்பாடுகள் (1), (3)-ல் இருந்து $\frac{dy}{dx}$, y என்பவற்றின் மதிப்பை (4)-ல் ஈடாக்கின்.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{3}\,\frac{a^2-ab+b^2}{b^2}\,\frac{b-2a}{x}$$

மீப்பெரு மதிப்புக்கு $\frac{d}{dx}\left(a+b\frac{dy}{dx}\right) = -$

அதாவது, $b\,\frac{d^2y}{dx^2} = -$

(அ-து.) $\frac{d^2y}{dx^2} = -$

$\frac{a^2-ab+b^2}{b^2} = +$ ஆகையால், $\frac{b-2a}{x} = -$

$$x^2+xy+y^2=3k^2$$

3)-ல் இருந்து y-ன் மதிப்பை ஈடாக்கின்,

$$x\sqrt{a^2-ab+b^2} = \pm k\,(b-2a)$$

$\frac{b-2a}{x}$ குறைக்குறி உடையதாயின்,

$$x\sqrt{a^2-ab+b^2} = -k\,(b-2a)$$

$$ax+by = ax+\frac{b\,(a-2b)}{b-2a}\cdot x$$

$$= -2\,(a^2-ab+b^2)\cdot\frac{x}{b-2a}$$

$$= 2\,(a^2-ab+b^2)\,\frac{k}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}$$

$$= 2k\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

பயிற்சிகள் 26.

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் உளவாயின், அவற்றைக் காண்க :

(1) $x^3 - 3x$

(2) $4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$

(3) $3x^4 - 4x^3 + 1$

(4) $x^5 - 15x^3 + 3$

(5) $4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$

(6) $(x - 1)^n (x + 2)$

(7) $a \cos x + b \sin x$

(8) $a^2 \cos^2 x = b^2 \sin^2 x$

2. $\dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$ -ன் மீப்பெரு மதிப்பு 3 என்றும், மீச்சிறு மதிப்பு $\frac{1}{3}$ என்றும் நிறுவுக.

3. $x\sqrt{ax - x^2}$ சார்பு $x = \frac{3}{4}a$ என்று இருக்குங்கால் மீப்பெரு மதிப்பைக் கொள்ளும் என்று நிறுவுக.

4. $\dfrac{(x - 1)^2}{(x - 3)^3}$ சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு $\dfrac{2}{27}$ என்றும், மீச்சிறு மதிப்பு சுன்னமென்றும் நிறுவுக.

5. $x = \dfrac{\pi}{5}$ ஆயின், $\sin x\,(1 + \cos x)$-ல் மீப்பெரு மதிப்பைக் கொள்கிறது என்று நிறுவுக.

6. $xy(y - x) = 2a^2$ எனின், $x = a$-ல் y மீச்சிறு மதிப்பைக் கொள்கிறது என்று நிறுவுக.

7. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $e^{1/e}$ என்று நிறுவுக.

8. $x e^{-x}$ - ன் மீப்பெரு மதிப்பினைக் காண்க.

9. $x \log x$-ன் மீச்சிறு மதிப்பினைக் காண்க.

10. $x^2 \log \dfrac{1}{x}$ -ன் மீச்சிறு மதிப்பு என்ன ?

11. x, y என்பவை மிகை ஆகவும், $x + y = k$ ஆகவும் இருப்பின், $x^m y^n$-ன் மிகப் பெரிய மதிப்பு $\frac{m^m n_n \quad k^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$ என்று நிறுவுக.

12. θ, ϕ என்றிவை குறுங்கோணங்களாகவும், அவற்றின் தொடர்பு $a \sec \theta + b \sec \phi = c$ ஆகவும் இருப்பின், $\theta = \phi$ என்ற நிலையில் $a \cos \theta + b \cos \phi$ மீச்சிறு மதிப்பைக் கொள்ளும் என்று நிறுவுக. இங்கு a, b, c என்பவை மிகையாகும்.

13. x-ன் மதிப்பு $a_1, a_2, a_3,$ . . . . a_n-ன் கூட்டிடை (Arithmetic Mean) ஆயின், $(x-a)^2 \; (x-a)^2 + — + (x-an)^2$ மீச்சிறு மதிப்பைக் கொள்ளும் என்று நிறுவுக.

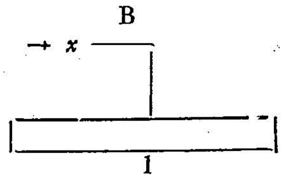
14. $f(x) \quad (x-a)^2 \phi(x)$ என்றிருப்பின், $\phi(a)$-ன் குறியைச் சார்ந்து $f(x)$-ன் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் உள என்று நிறுவுக.

15. $x^3 (x-2)^2$ சார்பின் மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகள் யாவை?

பயிற்சி 5.

எங்கும் ஒன்றுபோல் கனமேற்றிய l அடி நீண்ட உத்தரத்தின் வளைவு நெம்புத்திறன் (Bending Moment) $M = \frac{1}{2} w \, l \, x - \frac{1}{2} wx^2$ (இங்கு $w =$ ஓர் உத்திரத்தின் மேலுள்ள கனம்) எனவே, உத்தரத்து மையத்தில் வளைவு நெம்புத்திறன் கூடுதலாகும் என்று நிறுவுக.

$$M = \tfrac{1}{2} \, wlx \; - \; \tfrac{1}{2} wx^2.$$



M-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $\frac{dM}{dx} = 0, \; \frac{d^2 M}{dx^2} = -$ என்றிருப்பின் கிடைக்கும்.

$$\frac{dM}{dx} = \tfrac{1}{2} \, wl - wx$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = - w.$$

$$\frac{dM}{dx}=0 \therefore \tfrac{1}{2}wl-wx=0 \therefore x=\tfrac{1}{2}l$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-w.$$ இஃது எப்பொழுதும் குறையாகும்.

$\therefore$ வளைவு நெம்புத்திறன் $x=\frac{1}{2}l$ ஆயின் (அஃதாவது உத்தர மையத்தில்) கூடுதலாகும்.

பயிற்சி 6.

இரு எண்களின் கூட்டுத் தொகை 40. அவற்றின் இரு படிகளின் கூட்டுத்தொகை மிகக் குறைவாயின் அவ்வெண்கள் யாவை?

அவ்வெண்கள் x, y என்று கொள்வோம்.

ஆகவே, $x+y=40$.

அவற்றின் இரு படிகளின் கூட்டுத்தொகை

$$=x^2+y^2.$$

இதனை S என்று கொள்வோம்.

$$S=x^2+y^2$$

$$S=x^2+(40-x)^2$$

S-ன் மதிப்பு மிகச் சிறிதாக இருக்கையில் x-ன் மதிப்புக் காணல் வேண்டும்.

$$\frac{dS}{dx}=2x-2(40-x)$$

$$=4x-80$$

$$\frac{d^2S}{dx}=4,$$ இஃது எப்பொழுதும் மிகையாகும்.

$4x-80=0$ ஆயின், $\frac{dS}{dx}=0$

$$\therefore x=20$$

ஆகவே, எண்கள் 20 20

பயிற்சிகள் 27.

1. λ நீண்ட அலைகளின் வேகம் $\sqrt{\frac{\lambda}{a}+\frac{a}{\lambda}}$-க்குத் தகவு பொருத்தமுடையதாகும். இங்கு a ஒரு நிலை யெண். $\lambda = a$ என்றிருக்குங்கால், அலைகளின் வேகம் மிகவும் குறைவு என நிறுவுக.

2. ஒரு வோல்டா மின்கலம் (Voltaic cell) வெளியிடும் திறன் $\frac{E^2r}{(r+R)^2}$. இங்கு R உட்பிணர்வு (internal resistance) r வெளிப்பிணர்வு (external resistance), E = நிலையான மின்னுந்து (Electro motive force), $r=R$ ஆயின், P-ன் மதிப்புக் கூடுதலாகும் என்று நிறுவுக.

3. $\frac{n}{x}$ வரிசையும், வரிசைக்கு x கலங்களும் அடங்கிய ஒரு பேட்டரியின் (battery) உட்பிணர்வு r, வெளிப்பிணர்வு R, ஒரு கலத்தின் மின்னோகம் E, இப் பேட்டரி வழியாக வெளிப்படும் மின்னோட்டத்தின் அளவு $I = \frac{nxE}{x^2r+nR}$. மின்னோட்டம் கூடுதலாகக் கிடைப்பதற்கு ஒரு வரிசையில் எத்தனை கலங்களை அடக்குதல் வேண்டும்?

4. வேதி எதிர்வினையொன்றின் (Chemical reaction) வேகம் $v=k(b+x)(a-x)$. இங்கு k, a, b, நிலை யெண்களாகுமெனின், இவ்வேகம் எப்பொழுது மிகக் குறைவாகும்?

5. கடல் தந்திக்கம்பி கடத்தாப் பொருளினுள் (non conductor) உட்பட்ட செம்புக் கம்பியால் செய்யப்படுவது. செம்புக்கம்பியின் ஆரைக்கும், கடத்தாப் பொருளின் கனத்துக்கும் இடைப்பட்ட தகவு x எனின், செய்திகள் செல்லும் வேகம் $x \log \frac{1}{x}$-க்குத் தகுந்தாற்போல் வேறுபடும். $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ என்றிருப்பின் செய்திகள் மிக்க துரிதத்தில் செல்லும் என்று நிறுவுக.

6. கம்பி வழியாகச் செல்லும் மின்னோட்டத்தின் மொத்த அழிவு, மைல் ஒன்றுக்கு $W = C^2r + \frac{A}{r}$. இங்கு C மின்னோட்டத்

தின் அளவு (amperes), r ஒரு மைல் கம்பியிலுள்ள பிணர்வு, A ஒரு நிலை எண் எனின், r-ன் எம் மதிப்புக்கு மின்னோட்டத்தின் அழிவு மிகக் குறைவாகும்?

7. 100 அடி விட்ட முடைய வட்டமான நிலத்தின் நடுவே ஒரு தூணின் மேல் மின்சார விளக்கு ஒன்றுண்டு. தரைமட்டத்தில் விழும் விளக்கொளி அவ்விடத்திலிருந்து விளக்கின் தொலைக்கு இருபடியின் மாறுன தகவாகவும் (inverse ratio), அவ்விடம் வழியாகச் செல்லும் ஒளிக்கதிர் தரை மட்டத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணத்தின் நெடுக்கைக்குத் (sine) தகுந்தாற்போல் வேறுபட்டதாகவும் இருப்பின், அந்த நிலத்தைச் சுற்றியுள்ள வழியில் நல்ல வெளிச்சம் தெரிவதற்கு எவ்வளவு உயரத்தில் அவ்விளக்கு இருத்தல் வேண்டும்?

8. நீண்டதொரு சதுரத்தின் பரப்பளவு 25 ச. அடி எனின், அதன் (1) சுற்றளவு (2) மூலைவரை (diagonal) மிகக் குறைவாக இருப்பதற்கு உரிய நிலை என்ன?

9. பரப்பளவு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் சுற்றளவு எந்நிலையில் மிகக்குறைவாக இருக்கும்?

10. a ஆரையுடைய வட்டத்தில் வரையப்பட்ட ஒரு நீண்ட சதுரத்தின் சுற்றளவு எந் நிலையில் மிகக் கூடுதலாகும்? எந் நிலையில் மிகக் குறைதலாகும்?

11. (a, b) வழியாகச் செல்லும் கோடு ஆயங்களை (axes) P, Q-ல் வெட்டுமெனின், $OP+OQ$-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $a+2\sqrt{ab}+b$ என்று நிறுவுக.

12. சுற்றளவு கொடுக்கப்பட்ட ஓர் ஆரைப் பகுப்புத் துண்டின் (sector) கோணம் 2 ஆரையனுயின் அத் துண்டின் பரப்பு மீப்பெரு மதிப்பைக் கொள்ளும் என்றும், அம் மதிப்பு ஆரையினது இருபடி ஆகும் என்றும் நிறுவுக.

பயிற்சி 7.

(1) மூடியின்றியோ (2) மூடியுடனே கொடுக்கப்பட்ட ஓர் உலோகத் தகட்டினல் மிகுந்த கொள்ளளவு அடங்கிய ஒரு வட்ட வுருட்டு (cylinder) செய்வதற்கு அவ்வுருட்டுகளின் வகையளவுகள் (dimensions) யாவை?

தகட்டின் பரப்பு S என்று கொள்வோம்.

(1) மூடி இல்லையெனின்,

$$S = \text{கலத்தின் புறப் பரப்பு}$$

$$= 2\pi xy + \pi x^2$$

இங்கு x = உருட்டின் அடிப்பாகத்து ஆரை

y = ,, உயரம்

உருட்டின் கொள்ளளவு $= \pi x^2 y$

$$\therefore \quad V = \pi x^2 \left\{ \frac{S - \pi x^2}{2\pi x} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}(Sx - \pi x^3)$$

$$\frac{dV}{dx} = \tfrac{1}{2}(S - 3\pi x^2)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -3\pi x.$$

V மீப்பெரு மதிப்பை அடையும்பொழுது,

$$\frac{dV}{dx} = 0 \qquad \frac{d^2V}{dx^2} = -$$

$$\therefore \quad S - 3\pi x^2 = 0 \qquad \therefore \quad x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

$$\text{உருட்டின் உயரம் } y = \frac{S - \pi x^2}{2\pi x}$$

$$= \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

$$\text{உருட்டின் கொள்ளளவு} = \pi x^2 y$$

$$= \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

(2) மூடி உண்டெனின்,

S = உருட்டின் பரப்பு $= 2\pi xy + 2\pi x^2$

இங்கு x = உருட்டின் அடிப்பாகத்து ஆரை

y = உருட்டின் உயரம்

உருட்டின் கொள்ளளவு $V = \pi x^2 y$

$$V = \pi x^2 \left(\frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(Sx - 2\pi x^3)$$

$$\frac{dV}{dx} = \tfrac{1}{2}(S - 6\pi x^2)$$

V மீப்பெரு மதிப்பை அடையும்பொழுது,

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{d^2V}{dx^2} = -$$

$\therefore \quad \tfrac{1}{2}(S - 6\pi x) = 0$. ஆகவே $x = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$

உருட்டின் உயரம் $y = \dfrac{S - 2\pi x^2}{2\pi x}$

$$= \frac{2S}{6\pi}\sqrt{\frac{6\pi}{S}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

உருட்டின் கொள்ளளவு $= \pi x^2 y$

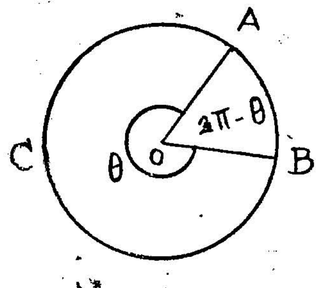
$$= \pi \frac{S}{6\pi} \cdot 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

$$= \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

பயிற்சி 8.

ஒரு வட்டத் தகட்டில் அண்ணளவாக 66° அடங்கிய ஆரைப் பகுப்புத்துண்டு வெட்டினால், எஞ்சிய தகட்டைக் கொண்டு வளைத்துச் செய்யப்பட்ட கூம்பு வடிவமான கலத்தின் கொள்ளளவு கூடுதலாகும் என நிறுவுக.

ABC என்ற ஆரைப் பகுப்புத் துண்டின் கோணம் θ என்று கொண்டால், வெட்டவேண்டிய பகுதியின் கோணம்:



படம்-15

$$2\pi - \theta$$

இவ் வட்டத்தின் ஆரை R ஆகின்

$$\text{வில் } ABC = R\theta,$$

ஆகவே, கூம்பு வடிவமான கலத்தின் அடிப்பக்கத்துச் சுற்றளவு $= R\theta$.

$$\text{ஆகவே, கலத்தின் அடிப்பாக ஆரை} = \frac{R\theta}{2\pi}$$

$$\text{கலத்தின் சாய்வு உயரம்} = R$$

$$\text{ஆகவே, உயரம்} = \left(R^2 - \frac{R^2\ \theta^2}{4\ \pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{கலத்தின் கொள்ளவு } V = \frac{\pi}{3}\ \frac{R^2\ \theta^2}{4\ \pi^2}\left(R^2 - \frac{R^2\ \theta^2}{4\ \pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ V = \frac{R^3}{12\pi}\left(\theta^4 - \frac{\theta^6}{4\ \pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

மீப்பெரு மதிப்பை V அடையும் பொழுது $\left(\theta^4 - \frac{\theta^6}{4\ \pi^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ மீப்பெரு மதிப்பை அடைகிறது. அப்பொழுது,

$\theta^4 - \frac{\theta^6}{4\pi^2}$ மீப்பெரு மதிப்பைக் கொள்ளும்

$$f(\theta) = \theta^4 - \frac{\theta^6}{4\pi^2}$$

$$f(\theta) = 4\theta^3 - \frac{6\theta^5}{4\pi^2}$$

$$f''(\theta) = 12\,\theta^2 - \frac{30\,\theta^4}{4\pi^2}$$

$$= \theta^2\left(12 - \frac{15\,\theta^2}{4\pi^2}\right)$$

$f(\theta)$ மீப்பெரு மதிப்பைக் கொள்ளுகையில் $f(\theta) = 0$

$$\therefore\quad 4\,\theta^3 - \frac{6\,\theta^5}{2\pi^2} = 0, \quad \theta^2 = \frac{8}{3}\pi^2$$

அப்பொழுது, $f''(\theta) = \frac{8}{3}\pi^2\left(12 - \frac{15}{2}\times\frac{8}{3}\right) = -$

ஆகவே, கொள்ளளவு மிகக் கூடுதலாயின்

$$\theta = \sqrt{\frac{8}{3}\pi^2} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$\therefore$ ஆரைப் பகுப்புத் துண்டின் கோணம் $= 2\pi - \theta$

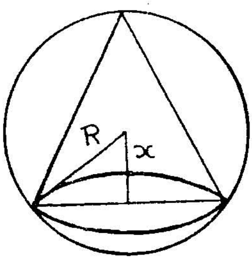
$$= 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$= 1{\cdot}153$ ஆரையன்

$= 66^\circ{\cdot}\,6.$

பயிற்சி 9.

கனமுள்ள மரவுருண்டையைச் செதுக்கிச் செய்த கூம்பு வடிவமான ஒரு கலத்தின் முனை உருண்டையின் புறப்பரப்பிலும், உருண்டையின் மையம் கலத்தின் அச்சிலும் இருப்பின் கலத்தின் கனஅளவு எப்பொழுது கூடுதலாகும்?



உருண்டையின் ஆரை R ஆகவும், அதன் மையத்தின் தொலை அடிப் பாகத்திலிருந்து x ஆகவும் கொள்வோம்.

கூம்பின் உயரம் $= R + x$

கூம்பின் அடிப்பாகத்து ஆரை $= \sqrt{R^2 + x}$

படம் 16

$\therefore$ கூம்பின் கன அளவு $V = \frac{\pi}{3}(R + x)(R^2 + x^2)$

மீப்பெரு மதிப்பை v அடையுங்கால்,

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{d^2V}{dx^2} = -$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}(R^2 - 2Rx - 3x^2)$$

$$= \frac{\pi}{3}(R-3x)(R+x)$$

$$\therefore x = \frac{R}{3} \text{ அல்லது } x = -R$$

x-க்கு $-R$ மதிப்பு வருவதில்லை.

கூம்பின் உயரம் $= R + x = \frac{4R}{3}$

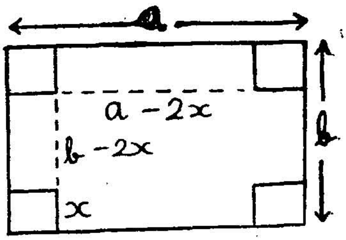
அடிப்பாகத்தின் ஆரை $= \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$

கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)^2\frac{4R}{3}$

$$= \frac{32\pi R^3}{81}$$

பயிற்சி 10.

a, b வகை அளவுடைய (dimensions) நீண்ட சதுரத் தகட்டின் மூலைகளிலிருந்து ஒரே அளவுடைய சதுரத் துண்டுகளை வெட்டியெறிந்தபின் ஓரங்களை மடக்கிச் செய்யப் பட்ட ஒரு நீண்ட சதுரப் பெட்டியின் உயரம் $\frac{1}{6}\left\{a + b - \sqrt{a} - ab + b^2\right\}$ ஆக இருக்கையில் அதன் கொள்ளளவு மீப்பெரு மதிப்பாகும் என்று நிறுவுக.



படம்-17

மூலைகளிலிருந்து அகற்றிய சதுரத் துண்டின் நீளம் x என்று கொள்வோம்.

பெட்டியின் கொள்ளளவு

$$= (a - 2x)(b - 2x)x$$

$$= 4x^3 - 2x^2(a+b) + abx$$

மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளுக்கு $\frac{dV}{dx} = 0.$

$\therefore 12x^2 - 4x(a+b) + ab = 0$

$$x = \frac{2(a+b) + \sqrt{4(a+b) - 12ab}}{12}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{(a+b) \pm (a^2 - ab + b^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$a^2 - ab + b^2 = (a-b)^2 + ab =$ மிகை மதிப்பு

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 4(a+b)$$

$x = \frac{1}{6}\left\{(a+h) + (a^2 - ab + b^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$ என்றிருப்பின்

$$\frac{d^2V}{d^2x} = 4(a^2 - ab + b^2)^{\frac{1}{2}} = \text{மிகை மதிப்பு}$$

$x = \frac{1}{6}\left\{(a+b) - (a^2 - ab + b^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$ என்றிருக்கையில்

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4(a^2 - ab + b^2)^{\frac{1}{2}} - \text{குறை மதிப்பு}$$

ஆகவே, $x = \frac{1}{6}\left\{(a+b) - (a^2 - ab + b^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$ என்றிருக்கையில் மீப்பெரு மதிப்பை V அடைகிறது.

பயிற்சிகள் 28.

1. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் செங்கோண எதிர் சிறைப்பக்கம் (hypotenuse) மற்றொரு பக்கம் ஆகிய இரண்டின் கூட்டுத்தொகை மீப்பெரு மதிப்பைக் கொள்ளின் இப் பக்கங்களின் இடைப்பட்ட கோணம் 60° என்று நிறுவுக.

2. மொத்தப் புறப்பரப்பு சுட்டப்பட்ட ஒரு கூம்பின் கன அளவு மீப்பெரு மதிப்பை அடையின் அதன் உச்சக் கோணத்தின் பாதி $\sin^{-1}\frac{1}{3}$ என்று நிறுவுக.

3. கன அளவு சொல்லப்பட்ட ஒரு கூம்பின் மொத்தப் புறப் பரப்பு மிகக் குறைவாயின் அதன் உச்சிக் கோணத்தின் பாதி $\sin^{-1}\frac{1}{3}$ என்று நிறுவுக.

4. இரு பக்கங்களும் மூடிய ஒரு வட்டவுருட்டு 400 ச. அடி கொண்ட தகட்டைக்கொண்டு செய்யுங்காலே, கழிவு 18·49 ச. அடி ஏற்பட்டது. அவ்வுருட்டின் கன அளவு மிகக் கூடுத லாயின், அதன் உயரம் என்ன?

5. கன அளவு சொல்லப்பட்ட ஓர் உலோகத்தை உருக்கி வார்த்த பாதி வட்ட உருட்டின் மொத்தப் புறப்பரப்பின் அளவு மிகக் குறைவாயின் அதன் உயரத்திற்கும் அருகிலுள்ள வட்டத் தின் விட்டத்திற்கும் இடைப்பட்ட தகவு $\frac{\pi}{\pi+2}$ என்று நிறுவுக.

6. சாய்வுயரம் சொல்லப்பட்ட ஒரு கூம்பின் கன அளவு மிகப் பெரிதாயின், அதன் உச்சிக்கோணம் $2\tan^{-1}\sqrt{2}$ என்று நிறுவுக.

7. a நீளமுடைய ஒரு கம்பியை இரு துண்டாக்கி ஒன்றினை வட்டவடிவமாகவும், பிறிதொன்றைச் சதுர வடிவமாகவும் ஆக்கிய பின், அவ்விரு துண்டுகளின் பரப்பின் கூட்டுத்தொகை மிகச் சிறியதாயின், அதன் மதிப்பு $\frac{a^2}{4(\pi+4)}$ என்று நிறுவுக.

8. V கன அளவும் S புறப்பரப்பும் உடைய நீண்ட சதுரப் பெட்டியின் ஒருபக்கம் மற்றொரு பக்கத்தைவிட n மடங்கு பெரியது; புறப்பரப்பு மிகச் சிறியதாயின் $nS^3 = 54(n+1)^2 V^2$ என்று நிறுவுக.

9. குறிப்பிட்ட அளவு தண்ணீர்கொள்ளும் ஒரு அண்டா வின் செங்குத்தான பக்கங்களையும், சதுர அடிப்பாகத்தையும் குறைவான செலவில் ஈயம் பூசுவதற்கு அதன் உயரம் அகலத்தின் பாதியாக இருத்தல் வேண்டும் என நிறுவுக.

அந்த அண்டா வட்டவுருட்டு வடிவாய் இருப்பின் அதன் உயரம் அடிப்பாகத்தின் ஆரை என்றும் நிறுவுக.

10 கோளம், கனசதுரம் என்ற இரண்டின் புறப்பரப்புக களின் கூட்டுத்தொகை கொடுக்கப்பட்டது எனக்கொண்டு அவற்றின் கன அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை மிகச்சிறிதாயின், கோளத்தின் விட்டம் கன சதுரத்தின் பக்கத்திற்குச் சமம் என்று நிறுவுக.

11. R ஆரையுடைய ஒரு கோளத்துள் வரைந்த வட்டவுருட்டின் கனஅளவு மிகக் கூடுதலாயின் அதன் உயரம் $\sqrt{\frac{2R}{3}}$ என்று நிறுவுக.

அதன் வளைபரப்பு (Curved Surface) மிகக் கூடுதலாயின், உயரம் $\sqrt{\frac{R}{2}}$ என்று நிறுவுக.

மேலும், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பு மிகக் கூடுதலாயின் இப் பரப்புக்குக் கோணத்தின் பரப்புக்கும் இடைப்பட்ட தகவு $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ என்று நிறுவுக.

12. கூம்பினுள் வரைந்த ஒரு வட்டவுருட்டின் கன அளவு மிகக் கூடுதலாயின் அதன் உயரம் கூம்பினது உயரத்தின் மூன்றில் ஒன்று என்று நிறுவுக.

வட்டவுருட்டின் வளை பரப்பு மிகக் கூடுதலாயின் அதன் உயரம் கூம்பினது உயரத்தின் பாதி என்று நிறுவுக.

13. R ஆரையுடைய கோளம் உள்ளே வரையப் பெற்ற ஒரு வட்டக் கூம்பின் கனஅளவு மிகக் கூடுதலாயின், அதன் உயரம் $4R$ என்றும், உச்சிக்கோணம் $2 \sin^{-1} \frac{1}{3}$ என்றும் நிறுவுக.

14. வட்டவுருட்டு வடிவான ஒரு மரக் குற்றியைச் செதுக்கிச் செய்த ஓர் உத்திரத்தின் வன்மை அகலத்திற்கும் உயரத்தின் முப்படிக்கும் தருந்தாற்போல் வேறுபடுவதுண்டு; a விட்டமுடைய குறியைச் செதுக்கிச்செய்த உத்தரத்தின் வன்மை மிகக் கூடுதலாயின், அதன் அகலம் குற்றியின் ஆரை என்று நிறுவுக,

15. R ஆரையுடைய ஒரு கோளத்தினுள் வரையப்பட்ட ஒரு வட்டவுருட்டின் மொத்தப் புறப்பரப்பு மிகச் சிறிதாயின் $\frac{h^2}{R^2} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ என்று நிறுவுக. இங்கு உயரம் h.

16. h உயரமும் a உச்சிக்கோணப் பகுதியும் உடைய கூம்பினுள் வரையப்பட்ட ஒரு வட்டவுருட்டினது கன அளவின் மீப்பெருமதிப்பு $\frac{4}{27} \pi h^3 \tan \alpha$ என்று நிறுவுக.

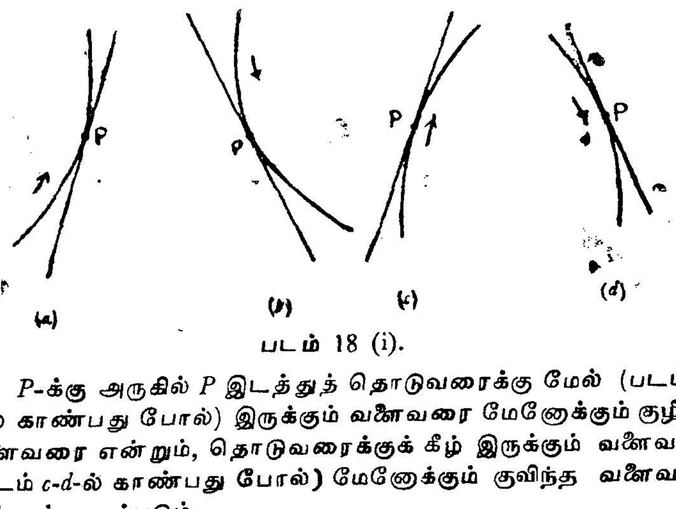
17. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1$-ன் இரட்டைக் குத்தாயம் (double ordinate). PQ இந் நீள் வட்டத்தின் (ellipse) நெட்டச்சுத் (major axis) கோடி A எனின், APQ முக்கோணத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு என்ன ?

18. A, B இரண்டும் நிலைப்புள்ளிகளாகவும் l என்ற கோட்டில் P நிலைப்புள்ளி ஆகவும் $AP+PB$-ன் மதிப்பு மிகச் சிறியது ஆகவும் இருப்பின், l ஓடு AP, PB கோடுகள் சம கோணங்களைப் பிறப்பிக்கும் என்று நிறுவுக.

19. சுற்றளவு சொல்லப்பட்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு மிகக் கூடுதற்கு அக் கோணம் சமபக்க முக்கோணமாதல் வேண்டும் என்று நிறுவுக.

20. ஒரு முறுக்காணியின் திறன் $E=\frac{t\,(1-\mu\;t)}{\mu+t}$; இங்கு μ பிணர்வுக்கெழு (coefficient of function); முறுக்காணியின் கோணத்தின் இருக்கை l) எனின், எந்த t-ன் மதிப்புக்கு அவ் வாணியின் திறன் மிகக் கூடுதலாகும் ?

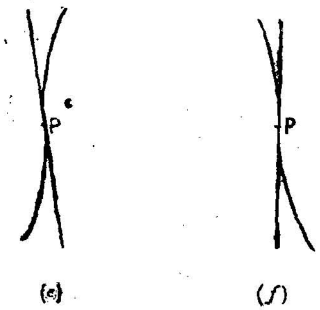
82. குழிவு, குவிவு, உருமாறும் புள்ளிகள் (Concavity, Conversity points of inflexion).



படம் 18 (i).

P-க்கு அருகில் P இடத்துத் தொடுவரைக்கு மேல் (படம் a, b-ல் காண்பது போல்) இருக்கும் வளைவரை மேனோக்கும் குழிந்த வளைவரை என்றும், தொடுவரைக்குக் கீழ் இருக்கும் வளைவரை (படம் c-d-ல் காண்பது போல்) மேனோக்கும் குவிந்த வளைவரை என்றும் கூறப்படும்.

படம் *e*, *f*-ல் காண்பதுபோல் வளைவரையில் குழிவிலிருந்து குவிவுக்கோ, எதிராகவோ மாறும் இடம் உருமாறும் புள்ளி (Point of inflexion) எனப்படும். இவ் வரையறையால் வளைவரை உருமாறும் புள்ளிகள் தன் தொடுவரையை வெட்டுமென்றும், உருமாறும் புள்ளி மீப்பெரு மதிப்புக்கும் மீச்சிறு மதிப்புக்கும் இடைப்படும் என்றும் விளங்கும்.



படம் 18 (ii).

83. படம் *a*, *b* ஐக் காண்போம்.

வளைவரையிலுள்ளதொரு புள்ளி அதன் வலமாக (குறியின் திசையில்) நகர்ந்து கொண்டே இருப்பின், அவ்விடத்துத் தொடுவரை இடப்பக்கமாகத் தொடுகுறியைச் (point of contact) சுற்றிக்கொண்டே இருக்கும். அப்பொழுது தொடுவரை x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணம் கூடிக் கொண்டே இருக்கும். ஆகவே, வளைவரை P-க்கு அருகிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் குழிவாக இருப்பதோடு x கூடிக்கொண்டே இருப்பின் வளைவரையின் சாய்வு வீதம் (gradient) அதாவது $\frac{dy}{dx}$ கூடிக் கொண்டே இருக்கும்.

ஆகவே, அதன் வகைக்கெழு மிகையாகும்.

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} \text{ மிகை ஆகும்.}$$

இவ்வாறே P-ன் அருகிலுள்ள புள்ளிகளில் வளைவரை குவிவாக இருப்பின், x கூடிவரு நிலையில் சாய்வு வீதம் $\frac{dy}{dx}$ குறைந்து கொண்டேவரும், ஆகவே, அதன் வகைக்கெழுவான $\frac{d^2y}{dx^2}$ குறைக்கணியமாகும்.

ஒரு வளைவரை குழிவா, குவிவா என்பதை அதன் இரண்டாவது வகைக்கெழுவின் குறியால் தெளியலாம்—மிகையாயின் குழிவு ஆகும். குறையாயின் குவிவு ஆகும். உருமாறும் புள்ளிகளில் வளைவரை குழிவாகவோ, குவிவாகவோ தம்முள் மாறிக் கொள்ளும். ஆகவே, அப் புள்ளிகளில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ குறி மாறும். $\frac{d^2y}{dx^2}$ தொடர்ச்சியுடையதாக இருப்பின் அப் புள்ளிகளில் $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. ஆகவே, உருமாறும் புள்ளிகளில்,

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}$-ன் மிகையாகவோ, குறையாகவோ தம்முள் மாறிக் கொள்ளுகிறது. ஆகவே, அப் புள்ளிகளில் $\frac{d^3y}{dx^3}$-ன் மதிப்பு சுன்னமாதல் இல்லை.

பயிற்சி 11.

x-ன் எம் மதிப்புகளுக்குக் குழிவாகவும், குவிவாகவும் $y = 3x^2 - 2x^3$ உள?

$$y = 3x^2 - 2x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 6x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6 - 2x = -6\ (2x-1)$$

$x > \frac{1}{2}$ ஆயின், $\frac{d^2y}{dx^2}$-ன் மதிப்பு குறையாகும்.

ஆகவே, அம் மதிப்புகளுக்கு வளைவரை குவிவாகும்.

$x < \frac{1}{2}$ ஆயின், $\frac{d^2y}{dx^2}$-ன் மதிப்பு மிகையாகும்.

அப்பொழுது வளைவரை குவிவாகும்.

$x = \frac{1}{2}$ ஆயின், $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. ஆகவே, அவ்விடத்தில் வளைவரைக்கு உருமாறும் புள்ளி ஒன்றுண்டு.

அப் புள்ளி $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ஆகும்.

பயிற்சி 12.

$y = \frac{a^2 x}{x^2+a^2}$ என்ற வளைவரையின் உருமாறும் புள்ளிகள் யாவை? அவை ஒரே கோட்டில் உள்ளன என்று நிறுவுக.

$$y = \frac{a^2 x}{x^2+a^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2(a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2a^2x(3a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^3}$$

உருமாறும் புள்ளிகளில் $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$\therefore x(3a^2-x^2) = 0$$

ஆகவே, $x = 0$ அல்லது $\pm\sqrt{3}\,a$

$x = 0$ ஆயின் $y = 0.$

$x = +\sqrt{3}a$,, $y = \frac{\sqrt{3}a}{4}$

$x = -\sqrt{3}a$,, $y = \frac{-\sqrt{3}a}{4}$

ஆகவே, உருமாறும் புள்ளிகள் (0, 0), $\left(\sqrt{3}a, \frac{\sqrt{3}a}{4}\right)$ $\left(-\sqrt{3}a, \frac{-\sqrt{3}a}{4}\right)$ இப் புள்ளிகள் $x = 4y$ என்ற கோட்டில் உள.

பயிற்சிகள் 29.

1. கீழ்க்காணும் வளைவரைகளில் உருமாறும் புள்ளிகள் யாவை?

(1) $y = x^4 - 6x + 8x - 1$ (5) $y = a\cos x + b\sin x$

(2) $y = x^3 - 9x + 7x - 6$ (6) $y = \dfrac{x^3}{a^2 + x^2}$

(3) $y = \cos x$

(4) $y = a\sin x + b\cos x$ (7) $xy^2 = a^2(a - x)$

2. $y = k\sin x$ என்ற வளைவரை x ஆயத்தை உருமாறும் புள்ளிகளில் வெட்டும் என்று நிறுவுக.

3. $y = (x - a)(x - b)(x - c)$ என்ற வளைவரையின் உருமாறும் புள்ளிகளைக் காண்க.

4. $y = \dfrac{6x}{x^2 + 3}$ வளைவரையில் உருமாறும் புள்ளிகள் மூன்று உள்ளன என்று நிறுவுக.

5. $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ என்ற வளைவரையில் உருமாறும் புள்ளிகள் மூன்று உண்டென்றும், அவை ஒரே கோட்டில் அமைந்தன என்றும் நிறுவுக. அக் கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

6. $x^2y + a^2(x + y) = a^3$ என்ற வளைவரையின் உருமாறும் புள்ளிகள் $x + 4y = a$ கோட்டில் உள என்று நிறுவுக.

7. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ வளைவரையின் $x = 1$ என்ற இடத்தில் உருமாறும் புள்ளி ஒன்று இருப்பின், a, b, c, d என்பவற்றின் இடைப்பட்ட தொடர்பு யாது?

7. சார்புகளின் விரிவு

(Expansion of functions)

84. முடிவிலாத் தொடர் (Infinite Series)

$u_1+u_2+u_3+ \ldots\ldots +u_n+ \ldots\ldots \infty$ என்ற முடிவிலாத் தொடரை $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ என்றோ, $\Sigma\, un$ என்றோ குறிப்பிடுவது மரபு. இத் தொடரில் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S_n என்று கொண்டால், n-ன் மதிப்பு கூடக்கூட (அஃதாவது முடிவற்ற எண்ணை n நெருங்கும்பொழுது) கீழ்வரும் மூன்று வகைகளுள் ஒன்று அதன் எல்லையாக இருக்கும்:

(1) முடிவுள்ள எண்

(2) எண்ணிலி (infinity)

(3) இரண்டும் இன்மை.

முதல் வகை : S_n, எண்ணிலியை n நெருங்க முடிவுள்ள எல்லையை நெருங்கின், அத் தொடர் எல்லையுள் தொடர் (convergent series) எனப்படும்.

இரண்டாவது வகை : S_n-ன் எல்லை எண்ணிலியாய் இருப்பின், அத் தொடர் எல்லையிலாத் தொடர் (divergent series) என்று கூறப்படும்.

மூன்றாவது வகை : இவ்விரெல்லையும் இல்லாதது, நேரப் பெருத் தொடர் (oscillatory series) எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $1 + x + x^2 + \ldots \infty$ என்ற பெருக்கத் தொடரைப் (Geometric series) பார்ப்போம்.

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^{n-1}$$

$$= \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

இங்கு x-ன் எண் மதிப்பு ஒன்றினுங் குறைவாயின்,

$$\underset{n \to \infty}{\text{Lt}} S = \frac{1}{1 - x}$$

ஆகவே, இப் பெருக்கத்தொடர் x-ன் இம் மதிப்புக்கு ஓர் எல்லையுள் தொடர் ஆகும்.

x-ன் எண் மதிப்பு ஒன்றினும் கூடுதலாயின்,

$$\underset{n \to \infty}{\text{Lt}} S_n = \infty$$

ஆகவே, இங்கு அது ஓர் எல்லையிலாத் தொடர் ஆகும்.

$x = +1$ எனின், $S_n = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1$

$$= n.$$

$$\therefore \underset{n \to \infty}{\text{Lt}} . S_n = \infty$$

ஈண்டும் பெருக்கத்தொடர் எல்லையிலாத் தொடராகும்.

$x = -1$ எனின்,

தொடர் $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ என்று ஆகும்.

ஆகவே, ஒரு தொடரின் n உறுப்புகளது கூட்டுத்தொகை காண இயன்றுல், அதன் எல்லையினுல் அத் தொடர் எல்லையுள் தொடரா, அன்றி எல்லையிலாத் தொடரா என்று அறிதல் முடியும். ஆனல், n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை காண்பது எளிதன்று. ஒருக்கால் அது காணக் கூடுமேனும், அதன் எல்லையைக் கண்டுபிடிப்பது மிகவும் கடினம். ஆகவே, இம் முறை எவ்விடத்தும் மேற்கொள்ளுதற்குரியதன்று. ஒரு தொடர் எவ்வகையைச் சார்ந்தது என்றறிவதற்குப் பல விதிகள் உள. அவற்றை இயற்கணித நூலிற் காண்க.

85. எல்லையுள் தொடரின் வரையறையினால் பின்வரும் உண்மைகள் விளங்கும்:

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots u_n + \ldots\ldots\ldots$ ஒரு முடிவிலாத்தொடர் என்றும், அதன் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை S_n என்றும் கொள்வோம்.

$\underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}} [S - S_n] = 0$ என்று இருக்குமாறு S என்ற முடிவுள்ள மதிப்புக் காண இயலின், அத் தொடர் ஓர் எல்லையுள் தொடராகும். அதன் மதிப்பும் S ஆகும்.

86. டெயிலரின் தேற்றம் (Taylors' Theorem)

5ஆவது அதிகாரத்தில், 65ஆவது பகுதியில்

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{(x - a)^n}{n!}$$

$f_n (a + x - a\,\theta)$ என்ற பொதுப்படை இடைமதிப்புத் தேற்றம் நிறுவப்பட்டது. இச் சமன்பாட்டில் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை $S_n(x)$ என்றும், இறுதிக்கண் நிற்கும் உறுப்பை $R_n(x)$ என்றும் குறிப்பின்,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

$R_n(x) = \frac{(x - a)^n}{1!n}$, $f_n (a + x - a\,\theta)$. இது லெக்ராஞ்சின் வகை மீதி (Lagrange's form of remainder) எனப்படும்.

87. கோசியின் வகை மீதி (Cauchy's form of Remainder)

$$F(x) = f(x) - (b - x) f'(x) - \frac{(b - x)^2}{2!} f''(x) \ldots$$

$$\ldots - \frac{(b-x)^n}{(n-1)!} f^{n-1}(x) - (b - x)R \text{ என்றும்,}$$

$$F'x = f(b) - f(a) f'(a) - \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) \ldots - (b - a)R$$

என்றும் கொள்வோம்.

அப்பொழுது, $F(a) = 0$, $F(b) = 0$

ஆகவே, a, b என்பவற்றின் இடைப்பட்ட x-ன் யாதொரு மதிப்புக்கேனும் $F'(x)$ சுன்னமாகும். அம் மதிப்பு x என்று கொள்ளின்,

$$F''(x_1) = 0$$

$F(x)$-ன் வகைக்கெழு காணின்,

$$F'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) + (b-x)f''(x) \ldots$$

$$-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) + R$$

$$= R - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x)$$

$F'(x_1) = 0$ ஆகவே, $R = \dfrac{(b-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x_1)$

x_1-க்குப் பதில் $a + \theta(b-a)$ என்று எழுதின்,

$0 < \theta < 1$; $b - x_1 = b - a - \theta(b-a)$

$$= (b-a)(1-\theta)$$

$$\therefore R = \frac{(b-a)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n\{a+\theta(b-a)\}.$$

$$\therefore f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$f^n(a+\theta\,\overline{b-a})$$

இங்கு b-க்குப் பதில் x என்று எழுதின்,

$$(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$f_n\{a + \overline{x-a}\theta\}$$

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

$R_n(x) = \dfrac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a + \overline{x-a}\theta)$. இங்கு $a < b < 1$. இது கோசியின் வகை மீதி எனப்படும்.

88. டெயிலர், மெக்லாரின் தொடர்கள் (Taylor's and Maclaurin's Series)

86, 87 பகுதிகளில் $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

$$\therefore f(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

$R_n(x)$-ன் எல்லை சுன்னமாயின்,

$$\underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}} \left\{ f(x) - S_n(x) \right\} = \underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}} R_n(x)$$

$$= 0.$$

ஆகவே, முடிவற்ற எண்ணை n நெருங்கும்போது $f(x)$ முடிவிலா எல்லையுள் தொடராகும்.

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{(n!)} f''(a) + \dots \infty.$$

இது டெயிலரின் தொடர் எனப் பெயர் பெறும்.

$\therefore$ இங்கு $a = 0$ என்று கொள்ளின்,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots\dots +$$

$$\frac{x_n}{n!} f^n(0) + \dots\dots \infty$$

இது மெக்லாரின் தொடர் எனப் பெயர் பெறும்.

இத் தொடர்கள் சார்புகளின் விரிவுகாணப் பெரிதும் பயன்படும்.

பயிற்சி 1.

sin x–ன் விரிவினைக் காண்க.

$f(x) = \sin x$ என்று கொள்வோம்.

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots\dots$ எனின்,

இங்கு $R_n(x) \to 0$ என்று இருத்தல் வேண்டும்.

$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = \sin x \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$

$$f^n(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x)$$

$$= \frac{x^n}{n!} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ எப்பொழுதும் ஒன்றைவிடக் கூடுதலாக இராது. மேலும், $\underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \frac{x^n}{n!} = 0.$

ஆகவே, $\underset{n \to \infty}{\text{Lt}} R_n(x) = 0.$

$$\therefore \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \infty$$

இது போன்ற $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \infty$

பயிற்சி 2.

e^x-ன் விரிவு :

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$$
$$f^n(x) = e^x \qquad f^n(\theta x) = e^{\theta x}$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\, R_n(x) = e^{\theta^n}\, \underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\, \frac{x^n}{n!} = 0.$$

$$\therefore\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \infty$$

பயிற்சி 3.

$\log(1+x)$-ன் விரிவினைக் காண்க.

$f(x) = \log(1+x)$ என்று கொள்வோம்.

$$f(x) = \log(1+x) \qquad f(0) = \log 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = 1\cdot 2$$

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad f^n(\theta x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

$$\therefore\ R_n(x) = \frac{x^n}{n!}\,\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

$$= (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

x-ன் மிகையாக > 1 என்றிருப்பின் $\frac{x}{1+\theta x} < 1$

ஆகவே, முடிவற்ற எண்ணை n நெருங்கும்பொழுது

$$\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n \to \theta$$

மேலும், $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\, \frac{1}{n} = 0$

ஆகவே, $R_n(x) = 0$

x-ன் மதிப்பு குறை எண்ணுயின் $\frac{x}{1+\theta x} < 1$ என்று இருத்தல் வேண்டும் என்பது இல்லை. ஆகவே, முந்தின தெரிப்பு ஈண்டுப் பொருந்தாது.

கோசியின் வகை மீதிப்படி,

$$R_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{\underline{|n-1}} \frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(1+\theta x)} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

x-ன் எண் மதிப்பு அஃதாவது $|x| < 1$ எனின்,

$$1-\theta < 1+\theta x$$

$$\therefore \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$$

ஆகவே, $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \to 0.$

மேலும், $x^n \to 0$ ஏனெனில், $|x| < 1$.

$(1+\theta x)$-ன் மதிப்பு நிலை எண்ணுகும்.

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} R_n(x) = 0.$$

ஆகவே, $|x| < 1$ என்றிருப்பின்,

$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots\ldots$

பயிற்சி 4.

$(1+x)^m$-ன் விரிவினைக் காண்க.

$(f) = (1+x)^m$ என்று கொள்வோம்.

$f(x) = (1+x)^m, \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = m(1+x)^{m-1} \qquad f'(0) = m$

$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \; f''(0) = m(m-1)$

$$f^n(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)\ (1+x)^{m-n}$$

$$\therefore\ f^n(\theta x) + m(m-1)\dots(m-n+1)\ (1+\theta x)^{m-n}$$

m ஒரு மிகை முழு எண்ணுயின், $f(x)$-ன் தொடரில் $(m+1)$ உறுப்புகள் இருக்கும். ஏனெனில், $n > m$ என்றிருக்கையில் $f^n(x) = 0$.

m ஒரு மிகை முழு எண்ணுக இல்லாவிடின், $R_n(x)$-ன் எல்லையைக் காணல் வேண்டும். கோசியின் வகை மீதிப்படி

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)\,x^n(1+\theta)^{n-1}}{(n-1)!}(1+\theta x)^{m-n}$$

முடிவிலாத் தொடர்.

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x + \dots\dots$$

$|x| > 1$ என்றிருக்கையில் எல்லையில் தொடராகும். ஆகவே, $|x| < 1$ என்று வரும் x-ன் மதிப்புகளைக் கண்டாற் போதும்.

$$R_n(x) = mx(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

$$\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{(n-1)}x^{n-1}$$

$mx(1+\theta x)^{m-1}$ ஒரு முடிவுள்ள தொகையாகும்.

$|x| < 1$ எனின், $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$

ஆகவே, $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}}\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \to 0$

$$\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n-1}x^{n-1}$$

கீழ்வரும் எல்லையுள் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$1+(m-1)x+\frac{(m-1)(m-2)}{\underline{|2}}x^2+\ldots\ldots$$

ஆகவே, அதன் எல்லை சுன்னமாகும்.

$$\therefore \underset{n\to\infty}{\text{Lt}} R_n(x)=0$$

$$\therefore \quad (1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots\ldots\infty$$

இங்கு $|x|<1$

பயிற்சி 5.

$$e^x \cos x = 1 + 2^{1/2} \cos\frac{\pi x}{4} + 2^{2/2}.\cos\frac{2\pi}{4}.\frac{x^2}{\underline{|2!}} +$$

$$2^{3/2}\cos.\frac{3\pi}{4}.\frac{x^2}{\underline{|3!}}+\ldots\ldots+2^{n/2}\cos\frac{n\pi.x^n}{4\,n!}+\ldots\ldots$$

என்று நிறுவுக.

$f(x) = e^x \cos x$ என்று கொள்வோம்.

அப்பொழுது, $f(x) = e_x.\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$$=\frac{e^{x(1+i)}+e^{x(1-i)}}{2}$$

$$\therefore \quad f^n(x)=\frac{(1+i)^n e^{x(1+i)}+(1-i)^n e^{x(1-i)}}{2}$$

$$f^n(0)=\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2}$$

$$=\frac{n}{2^2}\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\therefore \quad e^x\cos x=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}.\ f''(0)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{x^n}{2!}f^n(0)+\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + 2^{1/2} \cos \frac{\pi}{4} x + 2^{2/2}. \cos \frac{2\pi}{4}. \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$+ 2^{n/2}. \cos \frac{n\pi}{4}. \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

89. தொடர்களுக்கு வகைக்கெழு கண்டு அதனுல் சில சார்புகட்கு விரிவு காணமுடியும். இம் முறையைக் கையாளுவதற்குச் சில கட்டுப்பாடுகள் உண்டு. அவற்றையெல்லாம் இங்கு விரியாது அம் முறையைப் பயன்படுத்தும் வகையை மட்டும் காண்போம்.

பயிற்சி 6.

$|x| < 1$ என்றிருப்பின் $\tan^{-1} x$-ன் விரிவை ஓர் ஏறுந் தொடராகக் காண்க.

$f(x) \tan^{-1} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots$ என் கொள்வோம்.

அப்பொழுது $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots\ldots$

மேலும், $(1 + x)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots \infty$.

இவ்விரு விரிவுகளையும் ஒப்பிட்டுப்பார்ப்பின்,

$$a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = \ldots = 0$$

$$a_1 = 1, 3a_3 = -1, 5a_5 = 1 \ldots.$$

மேலும், $a_0 = \tan^{-1}{}_0$. சிறந்த மதிப்பை மட்டும் எடுப்பின்,

$$a_0 = 0$$

$$\therefore \tan^{-1} x = x - \tfrac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \ldots\ldots \infty$$

இங்கு $|x| < 1$. ஏனெனில், அப்பொழுதுதான் $(1+x^2)^{-1}$-ன் விரிவு காணவியலும்.

இத் தொடர் கிரகரித்தொடர் (Gregory's series) என்று கூறப்படும்.

பயிற்சி 7.

$\sin^{-1} x$-ன் விரிவு காண்க.

$$f(x) = \sin^{-1} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
என்று கொள்வோம்.

$$\therefore f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{ஆனல்,}\ \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \tfrac{1}{2} x + \frac{1\cdot3}{2\cdot4} x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

இவ்விரு தொடர்களையும் ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பின்,

$$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots\ldots\ldots = 0$$

$$a_1 - 1,\ 3\,a_3 = \tfrac{1}{2},\ 5\,a_5 = \frac{1\cdot3}{2\cdot4},\ \ldots\ldots\ldots$$

மேலும் $a = \sin^{-1} 0 = 0$

$$\therefore \sin^{-1} x = x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot3\ x^5}{2\cdot4\ 5} + \frac{1\cdot3\cdot5\ x^7}{2\cdot4\cdot6\ 7} + \ldots$$

30. வகைக்கெழு சமன்பாடுகளைப் (differential equations) பயன்படுத்திச் சில சார்புகளுக்கு விரிவு காணும் முறை பின்வரும் பயிற்சிகளால் தெளிவுறும்.

பயிற்சி 8.

$\tan^{-1} x$-ன் விரிவு காண்க.

$y = \tan^{-1} x$ என்று கொள்வோம்.

$$y_1 = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\therefore y_1 (1 + x^2) = 1.$$

இச் சமன்பாட்டின் முறை n வகைக்கெழு காணின்,

$$(1 + x^2) y_{n+1} + 2 n x y_n + n (n-1) y_{n-1} = 0$$

இங்கு $x = 0$ என்று கொண்டால்,

$$(y_{n+1})_{x=0} = -n (n - 1) (y_{n-1})_{x=0} \qquad \ldots (1)$$

மேலும், $(y)_{x=0} = 0,\ (y_1)_{x=0} = 1$

(1)-ல் n-க்குப்பதில் 2, 3, 4, 5, ... எடுப்பின்,

$$(y_3)_{x=0} = -2\cdot1\,;\ (y_1)_0 = -2!\ 1;\ (y)_{x=0} = 0$$

$$(y_5)_{x=0} = -4\cdot3\,(y)_0 = 4!\ ;\ (y_4)_{x=0} = -3\cdot2\,(y)_0 = 0$$

$$(y_7)_{x=0} = -6\cdot5\,(y_5)_0 = -6!\quad (y_6)_{x=0} = 0.$$

எல்லா இரட்டைக் கெழுவின் மதிப்பும் சுன்னமாகும். ஆகவே, $\tan^{-1}$-ன் விரிவு x-ன் ஒற்றைப்படி அடங்கிய உறுப்புகள் கொண்டதாகும்.

மெக்லாரின் தேற்றப்படி,

$$\tan^{-1} x = x - 2!\ \frac{x^3}{3!} + 4!\ \frac{x^5}{5!} \ldots\ldots$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots \text{ என்று வரும்.}$$

பயிற்சி 9.

$\cos(m \sin^{-1}x)$-ன் விரிவு காண்க.

$$y = \cos(m \sin^{-1} x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 \frac{x^2}{2!} + \alpha_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

என்று கொள்வோம்.

$$\alpha_0 = (y)_{x=0} = \cos(m \sin^{-1}x) = 1$$

$$y_1^2 = -\sin(m \sin^{-1}x).\ \frac{m}{\sqrt{1-x}} \qquad \ldots (2)$$

$$y_1(1-x^2) = m^2 \sin^{-2}(m \sin^{-1}x)$$

$$= m^2(1-y^2)$$

இச் சமன்பாட்டின் வகைக்கெழு காணின்,

$$(1-x^2)\,2y_1y - 2xy_1^2 = -2yy_1m^2$$

$$\therefore\ (1-x^2)\,y - xy_1 + m^2y = 0 \qquad \ldots (3)$$

இதன் n முறை வகைக்கெழு எடுப்பின்,

$$(1-x^2)\,y_{n+2} + 2 - (2n+1)xy_{n+2} + (m-n)y_{n-0} \qquad \ldots (4)$$

இங்கு $x = 0$ என்று கொண்டால்,

$$(y_{n+2})_{x=0} = -(m^2 - n^2)(y_n)_{x=0} \qquad \ldots (5)$$

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 \frac{x^2}{2!} + - \ldots + \alpha_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

இங்கு $y_{n+2} = \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} + \ldots$

ஆகவே, $(y_{n+2})_{x=0} = \alpha_{n+2}$

இது போன்றே $(v_n)_{x=0} = \alpha_n$

$(y_1)_{x=0} = \alpha_1$

(5)-ல் இருந்து $\alpha_{n+0} = -(m^2 - n)\alpha_n \qquad (6)$

(2)-ல் இருந்து $\alpha_1 = 0$

(3)-ல் இருந்து $\alpha_2 = -m^2 \delta$

(6)-ல் இருந்து $\alpha_3 = -(m^{\cdot} - 1^2)\alpha_1 = 0$

இவ்வாறே, $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = \ldots = 0$

$\alpha_4 = -(m^2 - 2^2)\alpha_2 = m^2(m^2 - 2^2)$

$\alpha_3 = -(m^2 - 4^2)\alpha_3 = -m^2(m^2 - 2)(m^2 - 4^2)$

ஆகவே, $\cos(m \sin^{-1}x) = 1 - m^2\delta \frac{x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}.x^4$

$$- \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)}{6!}.x^6 + \ldots$$

இங்கு $x = \sin\theta$ என்று கொண்டால்,

$$\cos m\theta = 1 - \frac{m^2}{2!}\sin^2\theta + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}\sin^4\theta \ldots \infty$$

பயிற்சிகள் 30.

1. பின்வரும் சார்புகட்கு விரிவுகளை மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

(1) $\tan x$	(6) $e \sin x$
(2) $x \cos x$	(7) $e^x \sin x$
(3) $\sec x$	(8) $\cos x \cosh x$
(4) $e^x \sec x$	(9) $\sin x \sinh x$
(5) $\log(1 + e^x)$	(10) $\log \sec x$

2. $x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{4^5} - \frac{2x^6}{945} \ldots\ldots$

$$\cos x \sin h\, x = x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 \ldots\ldots$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{10}{3}x^4 + \ldots$$

$$\log(1 + \sin x) = x - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{6} x^3 \ldots$$

$\log(1 + x + x^2) + x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \ldots$ என்று நிறுவுக.

3. பின்வரும் விரிவுகளை மெய்ம்மைப்படுத்துக :

(1) $\sin(x + \alpha) = \sin \alpha + x \cos \alpha - \frac{x^2}{2!} \sin \alpha - \cos \frac{x^3}{3!}$

(2) $\tan(x+a) = \tan a + \sec^2 a + x \sec^2 a + \tan \infty.$

(3) $\tan^{-1}(1 + x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 \ldots$

4. $\sin(m \sin^{-1} x) = mx - \frac{m(m^2 - 1^2)}{3!}x^3 + \frac{m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{5!}x^5 - \frac{m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)(m^2 - 5^2)}{7!}x^7 \ldots$

என்று நிறுவுக.

5. $(\sin^{-1} x)^2 = \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^2}{4!} \cdot 2x^4 + \frac{2^2 . 4^2}{6!} \cdot 2x^6 + \frac{2^2 . 4^2 . 6^2}{8!} 2x^8 + \ldots$ என்று நிறுவுக.

6. $\frac{(\sin^{-1} x)^2}{2!} = \frac{x^2}{2} + \frac{2\,x^4}{3 . 4} + \frac{2.4\,x^6}{3.5.6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}x^8 \ldots$

என்று நிறுவுக.

7. $e^{a\sin^{-1}x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ என்றிருப்பின்.

(1) $a_{n+2} = \dfrac{n^2 + a^2}{(n+1)(n+2)} a_n$ என்றும்,

(2) $e^{a\sin^{-1}x} = 1 + ax + \dfrac{a^2 x^2}{2!} + \dfrac{a(a^2+1)}{3!} x^3$

$+ \dfrac{a^2(a^2+2^2)}{4!} x^4 + \ldots$ என்றும் நிறுவுக.

8. $e^x \sin x$-ன் விரிவில் x^n-ன் வகைக்கெழு a_n ஆயின்

$$a_n - \frac{a_{n-1}}{1!} + \frac{a_{n-2}}{2!} - \frac{a_{n-3}}{3!} + \ldots\ldots \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}$$

என்று நிறுவுக.

9. $e^{x\cos a}\cos(x\sin a) = 1 + x\cos a + \dfrac{x^2}{2!}\cos 2a$

$+ \dfrac{x^3}{3!}\cos 3a + \ldots\ldots$ என்று நிறுவுக.

10. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right)$-ன் விரிவை θ-ன் படிகள் அடங்கிய தொடராகுமாறு காண்க.

8. பகுப்பு வகைக்கெழு காணுதல்
(Partial Differentiation)

91. பல மாறிகள் அடங்கிய சார்புகள்

இதுவரை ஒரு மாறி அடங்கிய சார்பைப் பற்றியே கற்றோம் ஆனால், ஒன்றுக்குமேல் பல மாறிகள் அடங்கிய சார்புகள் இருப்பதை நாம் அடிக்கடி பார்க்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக நீண்டதொரு சதுரத்தின் பரப்பு என்பது நீளம், அகலம் ஆகிய இருமாறிகள் அடங்கிய ஒரு சார்பு ஆகும். ஒரு முப்போகுக்கட்டி (parallelopiped) யின் கன அளவு நீளம், அகலம், உயரம் ஆகிய மும்மாறிகள் அடங்கிய ஒரு சார்பாகும்.

$u = f(x, y)$ என்று கொள்வோம். இங்கு x, y என்பன ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத இரண்டு மாறிகள். x, y தனித்தனியாகவே, ஒரே சமயத்துச் சேர்ந்தோ மாறலாம், மாறும் வகைகள் மூன்றுக்கும் தகுந்தாற்போல் u-ன் மாற்றங்களும் வேறுபட்டே வரும். எடுத்துக்காட்டாக 10 அடி நீளமும். 6 அடி அகலமும் உடைய நீள் சதுரத்தின் பரப்பு 60 ச. அடி ; நீளம் ஓர் அடி கூடின், பரப்பு 6 ச. அடி கூடும்; அகலம் ஓர் அடி கூடின். பரப்பு 10 சதுர அடி கூடும்; நீளமும் அகலமும் ஒவ்வோர் அடி கூடின், பரப்பும் 17 ச. அடி கூடும்.

x, y என்பவை தம்முட் சார்புடையனவல்ல. ஆதலின், அவற்றின் தனித்தனி மதிப்பு, ஒன்று நிலை எண்ணுயின் பிறிதொன்று மாறுதலும் உண்டு என்று கொள்ளலாம்.

x, y-ன் மதிப்புகள் முறையே $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ ஆக மாறும் பொழுது, u-ன் மதிப்பு $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$, அப்பொழுது, u-ன் மதிப்பு தனித்து $x + \Delta x$ ஆக மாறின், u-ன் மதிப்பு அந் நிலையில் $f(x + \Delta x, y)$.

u-ன் மதிப்பு மாற்றம் $= f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$

y-ன் மதிப்பு தனித்து $y + \Delta y$ ஆக மாறின்,

u-ன் மதிப்பு மாற்றம் $= f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

92. பகுப்பு வகைக் கெழுக்கள் (Partial differential co-efficients)

y-ன் மதிப்பு நிலையுடையதாகவும், x-ன் மதிப்பு மாறுவதாகவும் கொண்டு, xஐப் பொறுத்த u-ன் வகைக்கெழுவைக் காணலாம். இக்கெழு xஐப் பொறுத்த u-ன் பகுப்பு வகைக்கெழு எனப்படும். இதற்கு $\frac{\delta u}{\delta x}$ என்பது குறியீடு.

$$\text{ஆகவே, } \frac{\delta u}{\delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

இவ்வாறே x-ன் மதிப்பு நிலைத்ததாகவும், y-ன் மதிப்பு மாறுவதாகவும் கொண்டு yஐப் பொறுத்த u-ன் வகைக்கெழு காணலாம். இக் கெழு yஐப் பொறுத்த u-ன் வகைக் கெழு எனப்படும்.

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \underset{\Delta y \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$\frac{\delta u}{\delta x}$-க்கு $f'x$ என்றும், $\frac{\delta f}{\delta y}$-க்கு $f'y$ என்றும் குறியீடுகள் அமைத்துள்ளனர்.

93. தொடர் பகுப்பு வகைக்கெழுக்கள் (Successive partial differential co-efficients)

$u = f(x, y)$ என்ற சார்பைக் காண்போம். பெரும்பாலும் $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta u}{\delta y}$ என்ற u-ன் முதல் வகைக்கெழுக்கள் x, y அடங்கிய சார்புகளாகும். இவற்றின் xஐப் பொறுத்த அல்லது

yஐப் பொறுத்த தொடர் வகைக் கெழுவைக் காணலாம். x தனித்து மாறுவதாகக் கொண்டால், அவை

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}, \frac{\delta^3 u}{\delta y^3}, \; \cdots \cdots \; \frac{\delta^n u}{\delta x^n}.$$

y தனித்து மாறுவதாகக் கொண்டால், அவை

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}, \frac{\delta^3 u}{\delta y^3}, \; \cdots \cdots \; \frac{\delta^n u}{\delta y_n}.$$

yஐ நிலையாக வைத்து xஐப் பொறுத்த u-ன் வகைக்கெழு கண்டு, அதற்குப்பின் yஐப் பொறுத்த பகுப்பு வகைக்கெழு காணின் வருவது $\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)$. இதற்கு $\frac{\delta u}{\delta y.\delta x}$ என்பது குறியீடு.

xஐப் பொறுத்த u-ன் இரண்டாவது பகுப்பு வகைக்கெழு கண்டு, அதற்குப்பின் yஐப் பொறுத்த பகுப்பு வகைக்கெழு காணின் வருவது $\frac{\delta^3 u}{\delta y \cdot \delta y^2}$ என்று எழுதப்படும்.

இவ்வாறே, yஐ நிலையாக வைத்து, xஐப் பொறுத்த $\frac{\delta u}{\delta y}$-ன் பகுப்பு வகைக்கெழு $\frac{\delta^2 u}{\delta x \cdot \delta y}$ என்று குறிப்பிடப்படும்.

பெரும்பாலும் எல்லாச் சார்புகளிலும். $\frac{\delta^2 u}{\delta x \cdot \delta x} = \frac{\delta^2 u}{\delta y \cdot \delta x}$ என்று இருப்பது காணத்தக்கது.

பயிற்சி 1.

$u = \sin(ax + by + cz)$-ன் பகுப்பு வகைக்கெழுவைக் காண்க.

$$\frac{\delta u}{\delta x} = a \cos(ax + by + cz)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = b \cos(ax + by + cz)$$

$$\frac{\delta u}{\delta z} = c \cos(ax + by + cz)$$

பயிற்சி 2.

$$u = \frac{xy}{x+y}$$ என்றிருப்பின், $x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta y} = u$ என்று

நிறுவுக.

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{(x+y)y - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

இவ்வாறே,

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

$$\therefore x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{xy^2}{(x+y)^2} + \frac{x^2y}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{xy}{x+y}$$

$$= u.$$

பயிற்சி 3.

$$u = \tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}$$ என்றிருப்பின்,

$x\frac{\delta u}{\delta x} = y\frac{\delta u}{\delta y}\sin 2u$ என்று நிறுவுக.

$$\tan u = \frac{x^3+y^3}{x-y}$$

இங்கு xஐப் பொறுத்த பகுப்பு வகைக்கெழு காணின்,

$$\sec^2 u\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{(x-y)\,3x^2 - (x^3+y^3)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 3x^2y - y^3}{(x-y)^2}$$

இதுபோன்றே, $\sec^2 u\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{x^3+3xy^2-2y^3}{(x-y)^2}$

ஆகவே, $\sec^2 u \left(x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta y}\right)$

$$= \frac{x(2x^3-3x^2y-y^3)+y(x^3+3xy^2-2y^3)}{(x-y)^2}$$

$$\frac{2(x^4-y^4)-2(x^3y-xy^3)}{(x-y)^2}$$

$$= 2.\frac{x^3+y^3}{x-y}$$

$$= 2\tan u.$$

$$\therefore x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y} = 2\tan u \sec^2 u$$

$$= \sin 2u$$

பயிற்சி 4.

$V = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ என்றிருப்பின்,

$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0$ என்று நிறுவுக.

xஐப் பொறுத்த V-ன் பகுப்பு வகைக்கெழு காண வருவது,

$$\frac{\delta V}{\delta x} = -\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,2x$$

$$= -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}.$$

மீண்டும் xஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு காணின்

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} = 3/2x\,(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\,2x-(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$= \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

இவ்வாறே, $\frac{\delta^2 V}{\delta y^2} = \frac{2y^2 - z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)}{}^{5/2}$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = \frac{\delta z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)}{}^{5/2}$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0.$$

பயிற்சி 5.

$u = \log\left(\frac{x^2 + y^2}{xy}\right)$ என்றிருப்பின், $\frac{\delta^2 u}{\delta x \cdot \delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta x \ \delta y}$

என்ற தேற்றத்தை மெய்ம்மைப் படுத்துக.

$$u = \log(x^2 + y^2) - \log(xy)$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{xy}.$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x}.$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y \cdot \delta x} = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{xy}$$

$$= \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \cdot \delta y} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{y}\right)$$

$$= -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\therefore \frac{\delta^2 u}{\delta y \ \delta x} = \frac{\delta^2 u}{\delta x \cdot \delta y}.$$

பயிற்சிகள் 31.

1. பின்வருவனவற்றிற்கு $\frac{\delta u}{\delta x}$, $\frac{\delta u}{\delta y}$ காண்க.

(1) $u = \tan(ax + by)$ (4) $u = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

(2) $u = (3x^2 - 4xy)^2$ (5) $u^2 = \frac{x^2 - y_2}{x^2 + y^2}$

(3) $u = x^2 y^2$ (6) $u \tan^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு $\frac{\delta V}{\delta x}$, $\frac{\delta V}{\delta y}$, $\frac{\delta V}{\delta z}$ காண்க.

(1) $V^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

(2) $V = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gzx + 2fyz + cz^2$

(3) $V = \tan^{-1}\left(\frac{x + y}{z}\right)$

3. $u = (y - z)(z - x)(x - y)$ என்றிருப்பின்.

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta u}{\delta z} = 0$$ என்று நிறுவுக.

4. $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xy^3)$ என்றிருப்பின்,

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta u}{\delta z} = \frac{3}{x + y + z}$$ என்று நிறுவுக.

5. $u \log(\tan x + \tan y + \tan z)$ என்றிருப்பின்,

$$\sin 2x \frac{\delta u}{\delta x} \times \sin 2y \frac{\delta u}{\delta y} + \sin 2z \frac{\delta u}{\delta z} = 2$$

என்று நிறுவுக.

6. $\frac{z}{e\, x^2 = y^2} = x - y$ எனின், $y\frac{\delta z}{\delta x} + x\frac{\delta z}{\delta y} = x^2 - y^2$

என்று நிறுவுக.

7. $u = \sin\left(\frac{x^2 - y^2}{x + y}\right)$ என்றிருப்பின்,

$$x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{x^2 + y}{x + y}\cos\frac{x^2 + y^2}{x + y}$$ என்று நிறுவுக.

8. $u = \tan^{-1}\left(\frac{x + y}{x + y}\right)^{3/2}$ எனின், $x\frac{\delta u}{\delta x} + y\frac{\delta u}{\delta y} = 0$

என்று நிறுவுக.

9. $u = \sin^{-1}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ என்றிருப்பின், $\frac{\delta u}{\delta x} = -\frac{y}{x} - \frac{\delta u}{\delta y}$

என்று நிறுவுக.

10. பின்வரும் சார்புகள் மூலம் $\frac{u^2 u}{\delta x\, \delta y} + \frac{\delta^3 u}{\delta y\, \delta x}$ என்ற

தேற்றத்தை மெய்மைப் படுத்துக.

(1) $u = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^3}$

(2) $u = \tan\frac{y}{x}$.

(3) $u = \log\left\{x\tan^{-1}(x^2+y^2)\right\}$.

11. $u \quad \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ எனின்,

$$\left(x^2\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + 2xy\frac{\delta^2 u}{\delta x \cdot \delta y} +\right) y^2\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$$ என்று நிறுவுக.

12. $u = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ எனின்.

$$x\frac{\delta^2 u}{\delta y \cdot \delta x} \quad y\frac{\delta^2 u}{\delta z . \delta x} \quad z.\frac{\delta^2 u}{\delta x . \delta y}$$ என்று நிறுவுக.

13. $u = \frac{x^2 y^2}{x+y}$ என்றிருப்பின்,

$$x\frac{\delta^2 u}{\delta^2 x} + y\frac{\delta^2 u}{\delta x . \delta y} = 2\frac{\delta u}{\delta x}$$ என்று நிறுவுக.

14. $z(x+y)=x^2+y^2$ என்றிருப்பின்,

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}-\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2=4\left(1-\frac{\delta z}{\delta x}-\frac{\delta z}{\delta y}\right)$$ என்று நிறுவுக.

15. $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ என்றிருப்பின்,

$$\frac{\delta^2 r}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 r}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 r}{\delta y^2}=\frac{2}{r}$$ என்று காட்டுக.

16. $V=e^{a\theta}\cos(a\log r)$ என்றிருப்பின்,

$$\frac{\delta^2 V}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta V}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 V}{\delta\theta^2}=0$$ என்று நிறுவுக.

17. $r^2=x^2+y^2$ என்றிருப்பின்,

$$\frac{\delta^2 r}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 r}{\delta y^2}=\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\delta r}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta r}{\delta y}\right)^2\right\}$$ என்று நிறுவுக.

18. $u=f(y+ax)+\phi(y-ax)$ எனின்,

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=x^2\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}$$ என்று நிறுவுக.

19. $u=\sin^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}$ எனின்.

$$x\frac{\delta u}{\delta x}+y\frac{\delta u}{\delta y}=0$$ என்று நிறுவுக.

20. $a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2=0$ என்றிருக்கும்பொழுது.

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$$ கோவையின் மதிப்பு என்ன ?

21. $V=(1-2xy-y^2)^{-1/2}$ எனின்,

$$x\frac{\delta V}{\delta x}-y\frac{\delta V}{\delta y}=V^3y^2$$ என்று நிறுவுக.

22. $z=x\tan^{-1}\frac{y}{x}+x\,e^{x/y}$ எனின்

$$x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}+2xy\frac{\delta^2 z}{\delta x\,\delta y}+y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=0$$ என்று நிறுவுக.

23. $u = e^{xy}$ என்றிருப்பின்,

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \frac{1}{u}\left[\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2\right]$$ என்று காட்டுக.

24. $u = y^2 z^2 e^{x/2} + z^2 x^2 e^{y/2} + x^2 y^2 e^{z/2}$ எனின்,

$$\frac{\delta^6 u}{\delta x^2 . \delta y^2 . \delta z^2} = e^{x/2} = e^{y/2} + e^{z^2}$$ என்று நிறுவுக.

25. $u = \sin^{-1} \frac{x^3 + y^2}{x + y}$ என்றிருப்பின்,

$$x \frac{\delta u}{\delta x} + y \frac{\delta u}{\delta y} = \tan u$$ என்று காட்டுக.

26. $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ எனின்,

$$\frac{\delta^3 u}{\delta^2 y . \delta x} = \frac{\delta^3 u}{\delta x . \delta y^2} = \frac{\delta^3 u}{\delta y \cdot \delta x \cdot \delta y}$$ என்று நிறுவுக.

27. $x^x y^y z^z = c$ என்றிருப்பின், $x = y = z$ என்றிருக்கையில்,

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \cdot \delta y} = -(x \log e\, x)^{-1}$$ என்று நிறுவுக.

28. $z = \log r$ என்றும், $r^2 = (x-a) + (y-b)^2$ என்றும் இருப்பின், $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0$ என்று நிறுவுக.

94. கூடிய வகைக்கெழு (Total Differential coefficient)

$u = f(x, y)$ என்று கொள்வோம். இங்கு x, y என்பவை ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத மாறிகள். x, y-ன் மதிப்புகள் $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ என்று நிரலே மாறின் அதற்குத் தக, u-ன் மதிப்பும் மாறும். அதனை $u + \Delta u$ என்று கொண்டால்,

$$\Delta u = f(x \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

இதனோடு $f(x, y + \Delta y)$ ஐக் கூட்டிக் கழிப்பின்,

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y) + \Delta\ ) - f(x, y)$$

இடை மதிப்புத் தேற்றத்தின்படி,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)=f'x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x$$

$$f(x, y+\Delta y)-f(x,y)=f'y(x, y+\theta^2\Delta y).\Delta y$$

இங்கு θ_1 θ_2 மிகை பின்னங்கள்.

ஆகவே,

$\Delta u=f'x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+f'y(x, y+\theta_2\Delta y.)$ Δy x, y மாறிகள் t என்ற மாறியின் சார்பாயின், u, t-ன் ஒரு சார்பு ஆகும்.

ஆகவே, t–ன் கூட்டுத் தொகை Δt ஆயின், x, y, u என்பவற்றின் கூடுந் தொகைகள் முறையே Δx, Δy, Δu ஆகும்.

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}+f'x(x+\theta, \Delta x, y+\Delta y)\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}+f^2y(x, y+\theta^2\Delta y\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

சுன்னத்தை Δt நெருங்குங்கால் Δx, Δy சுன்னத்தையும்,

$\frac{x\Delta}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ முறையே, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{du}{dt}$ என்பவற்றையும் நெருங்கும்.

$$\frac{du}{dt}=f'x(x, y)\frac{dx}{dt}+f'y(x, y)\frac{dy}{dt}.$$

இங்கு $f'x$, $f'y$ முறையே, x, y என்பவற்றைப் பொறுத்த $f(x, y)$-ன் பகுப்பு வகைக்கெழுவாகும்.

ஆகவே,

$$\frac{du}{dt}=\frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

இவ்வண்ணமே, $u=f(x, y, z)$-ல் x, y, z, t-ன் சார்பாயின்

$$\frac{du}{dt}=\frac{\delta u}{\delta x}\frac{dx}{dt}+\frac{\delta u}{\delta y}\frac{dy}{dt}+\frac{\delta u}{\delta z}\frac{dz}{dt}$$

இவ்வாறே, $u=f(x_1, x_2, -\ldots x_n)$-ல் $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ t-ன் சார்பாயின்,

$$\frac{du}{dt}=\frac{\delta u}{\delta x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\delta u}{\delta x}\frac{dx}{dt}+\ldots\frac{\delta u}{\delta x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

95. குறிப்பிடத்தகும் ஒரு வகை.

t-ன் சார்பாக x, y என்றும், $u = f(x, y)$ என்றும் இருப்பின், $\frac{du}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta u}{\delta y} \frac{dy}{dt}$

இங்கு t ஐ x ஆகக் கொண்டால், x, y என்பவற்றின் சார்பு u, x-ன் சார்பு y.

$$\therefore \frac{du}{dx} \frac{\delta u}{\delta x} \frac{dx}{dx} \cdot + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

இங்கு $\frac{du}{dx}$, $\frac{\delta u}{\delta x}$ வேறுபட்டவை.

இது போலவே, $\frac{du}{dx} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dy}$,

எடுத்துக்காட்டாக, $u = x^2 + y^2$ என்ற சார்பைப் பார்ப்போம். இங்கு x-ன் ஒரு சார்பு y என்று கொள்வோம்.

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2x; \quad \frac{\delta u}{\delta y} = 2y$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= 2x + 2y \frac{dy}{dx}.$$

$\frac{du}{dx}$ -ன் மதிப்பு x, y-ன் சார்புத் தொடரைப் பொறுத்தது.

$$x + y = 1 \text{ என்றிருப்பின்}, \ 1 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 2x - 2y.$$

$u = x^2 + y^2$, $x + y = 1$ இவற்றுள் yஐ விலக்கின் x-ன் சார்பாகவே u வரும். பின்னர் $\frac{du}{dx}$ காணலாம். ஆனால், இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து yஐ விலக்குவது எளிதன்று. ஆதலின், இம் முறையை எப்பொழுதும் பயன்படுத்த முடியாது.

86. உட்படு சார்புகள் (Implicit functions)

உட்படு சார்புகளிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ காணும் முறையை முன்பே கண்டோம். இப் பகுதிகளில் அதனைக் காணக்கூடிய வகைக் கெழுவைப் பயன்படுத்தும் முறையைக் காண்போம்.

$f(x, y) = c$ என்று கொள்வோம்:
கூடிய வகைக்கெழுவை இருபுறத்தும் எடுப்பின்,

$$\frac{dc}{dx} = \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y}\frac{dy}{dx}$$

c. நிலையெண்ணாதலின் $\frac{dc}{dx} = 0$

$$\therefore \quad \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$$

பயிற்சி 6.

$u = x^2 + y^2 + z^2, \; x = et, \; y = et, \sin t, \; z = et \cos t$

என்றிருப்பின், $\frac{du}{dt}$ காண்க.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta u}{\delta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\delta u}{\delta z}\frac{dz}{dt}$$

$$= 2x\, et + 2y\,(e \sin t + et \cos t) + 2z\,(et \cos t - et \sin t)$$

$$= 2et\,(x + y \sin t + y \cos t + z \cos t - z \sin t)$$

$$= 2\,et\,(et + e^2 \sin^2 t + et \sin t \cos t + et \cos^2 t - et \sin t \cos^2 t$$

$$= 2\,et.\ 2e$$

$$= 4\,e^2 t.$$

பயிற்சி 7.

$u = x^2 + y^2$, $y = \dfrac{1-x}{x}$ என்றிருப்பின், $\dfrac{du}{dx}$-ன் மதிப்பு என்ன ?

$$\frac{du}{dx} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= 2x + 2y \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

$$= 2x + 2y\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x - \frac{2}{x^2} \quad \frac{(1-x)}{x}$$

$$= \frac{2(x^4 + x - 1)}{x^3}$$

பயிற்சி 8.

$x^3 + y^3 = 3axy$ என்றிருப்பின், $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$ அஃதாவது $f(x, y) = 0$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 3x^2 - 3ay; \quad \frac{\delta f}{\delta y} = 3y^2 - 3ax$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

97. சமபடித்தான சார்புகள் (Homogeneous functions)

$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n$ இக் கோவையில் ஒவ்வோர் உறுப்பின் படியும் n. இக் கோவை n படி சமபடித்தான சார்பு (Homogeneous function) எனப்படும். இதனைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$f(x, y) = x^n \left\{ a_0 + a_1 \frac{y}{x} + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \ldots\ldots + a_n\left(\frac{y}{x}\right)^n \right\}$$

$= x^n \, x\left(\dfrac{y}{x}\right)$-ன் ஒரு சார்பு.

$$= x^n F\left(\frac{y}{x}\right)$$

இது போன்றே, x_1, $_2$ .... x_n மாறிகள் அடங்கிய n படி சமபடித்தான $f(x_1\, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\, x_n)$ என்ற சார்பை,

$$x_r{}^n F\left(\frac{x_1}{x_r}, \ \frac{x_2}{x_r} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x_n}{x_r}\right)$$ என்று எழுதலாம்.

98. சமபடித்தான சார்புகள் பற்றிய ஆயலர் தேற்றம் (Euler's Theorem on Homogeneous functions)

$f(x, y)$, r படி சமபடித்தான x, y-ன் சார்பாயின்,

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} = f(x, y).$$

$$f(x, y) = a_0\, x^n + a_1\, x^{-1}\, y + x_2\, x^{n-2}\, y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n\, y^n$$
என்று கொள்வோம்.

இஃது n படி சமபடித்தான சார்பாதலின்,

$$f(x, y) = x^n\, F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta x}\left\{ x^n\, F\left(\frac{y}{x}\right)\right\} = n\, x^{n-1}\, F\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-2}\, y.\ F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta}{\delta y}\left\{ x^n\, F\left(\frac{y}{x}\right)\right\} = x^n\, F'\left(\frac{y}{x}\right).\ \frac{1}{x} = x^{n-1}\, F'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\therefore \frac{\delta f}{\delta x} + y\, \frac{\delta \delta}{\delta y} = n.\ x^n\, F\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-1}\, y\, F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$+ x^{n-1} y.\ F\left(\frac{y}{x}\right) = n.\ x^n\, F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= n\, f(x, y) = nf.$$

பொதுவாக, $f\ (x_1, x_2, \ldots \ldots\ldots x_n)$ n படியே சமபடித்தான சார்பாயின், $x_1\, \frac{\delta f}{\delta x_1} + x_2\, \frac{\delta f}{\delta x} \ldots\ldots\ldots + x_n\, \frac{\delta f}{\delta x_n}$ nf என்று முன்னர்ப் போலவே நிறுவலாம்.

பயிற்சி 9.

$u = x^3 + y^3 + 3xyz$ என்றிருப்பின், ஆயலர் தேற்றத்தை மெய்ம்மைப்படுத்துக.

$$\frac{\delta u}{\delta x} = 3x^2 + 3yz$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} = 3y^2 + 3xz$$

$$\frac{\delta u}{\delta z} = 3xy$$

$$\therefore x\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} + z\frac{\delta u}{\delta z} = 3x^3 + 3y^3 + 9xyz$$

$$= 3(x^3 + y^3 + 3xyz)$$

$$= 3u.$$

பயிற்சிகள் 32.

1. பின்வரும் பயிற்சிகளில் $\frac{du}{dt}$ காண்க.

(1) $u = \log(x + y + z), x = \cos t, y = \sin^2 t, z = \cos 2t$

(2) $u = xyz, x = e^{-t}, \sin t, z = \sin t, y = e^{-t}$

(3) $u = x^3y^4z^2. x = t^2, y = t^3, z = t^4$

2. பின்வரும் பயிற்சிகளில் $\frac{du}{dx}$ காண்க.

(1) $u = x^2 + y^2 + a^2$ $\quad x^3 + y^3 = a^3$

(2) $u = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ $\quad y \tan^2 x$

(3) $u = x^3 y^2$ $\quad x^2 - xy + y^2 = a^2$

(4) $u = \sin(x^2 + y^2)$ $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{y^2} = 1$

(5) $u = x \log(xy)$ $\quad x^3 + y^3 - 3xy = 0$

3. x, y பின்வருவன போல் தொடர்பு உடைய நிலையில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

(1) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(2) $y^2 = 4ax$

(3) $xy = c^2$

(4) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$

(5) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$

(6) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

4. பின்வரும் சார்புகளைக் கொண்டு ஆயலர் தேற்றத்தை மெய்ம்மைப் படுத்துக:

(1) $u = \frac{x^3 (x^3 - y^3)^3}{(x^2 + y^2)^3}$

(2) $u = \sin \left(\frac{x - y}{x + y} \right)^{\frac{1}{2}}$

99. பிழைகளும் அண்ணளவுகளும் (Erros and approximations): தக்க கருவிகளால் எவ்வளவு நன் முறையில் அளந்த போதும் நடைமுறையில் சிற்சில பிழைகள் அவ்வளவுகளில் வரவே செய்யும். ஆகவே, பல்வேறு அளவைகளில் மொத்தப் பிழை எவ்வளவு வரலாம் என்று சிறப்பாகக் கருதவேண்டும்.

x ஐ அளக்கும்பொழுது வரும் சிறு பிழையை δx என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். δx தனிப்பிழை (absolute error) என்றும், $\frac{\delta x}{x}$ ஒப்புப் பிழை (relative error) என்றும், $\frac{\delta x}{x} \times 100$ நூற்று வீதப்பிழை (percentage error) என்றும் குறிப்பிடப்படும். எடுத்துக் காட்டாக 10″ அளக்கும்பொழுது ·2″ பிழை ஏற்படின், தனிப் பிழை ·2″, ஒப்புப் பிழை ·02, நூற்று வீதப்பிழை 2.

100. அண்ணளவான கணக்கீடுகள் (Approximate calculations): $y = f(x)$ என்று கொள்வோம். y-ன் மதிப்பு x-ன் அளவிலிருந்து கணக்கிடப்படும். x-ன் அளவிலுள்ள பிழை, அதாவது உண்மை

அளவுக்கும், அளந்த அளவுக்கும் உள்ள வேற்றுமை δx எனின், உண்மை அளவு $x + \delta x$. அதற்குத்தக y-ல் ஏற்படும் பிழை δy என்று கொள்ளின்,

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$$
$$= f'(x + \theta\, \delta x)\, \delta x. \quad \text{(இடைமதிப்புத் தேற்றம்).}$$

இங்கு $0 < \theta < 1$ ஆகையால், $\theta\, \delta x$ மிகச் சிறிய தொகை. இதனைக் கழிக்க.

$\delta y = f'(x)\, \delta x$ அண்ணளவாக

இதனைப் பின்வருமாறும் நிறுவலாம்.

x-ன் கூடுந்தொகை δx ஆயின், y-ன் கூடுந்தொகை δy என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = f'(x)$$

ஆகவே, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = f'(x) + t.$ இங்கு t மிகவும் சிறிய தொகை.

$$\therefore \quad \delta y = f'(x)\, \delta x + t.\, \delta x.$$

சுன்னத்தை δx நெருங்கும் நிலையில் t. δx ஐ முதல் உறுப போடு ஒப்பிடின், அதுவும் சிறிதாதலின் அதனைப் பொருட் படுத்த வேண்டா. அப்பொழுது அண்ணளவாக

$$\delta y = f''(x)\, \delta x.$$

பயிற்சி 10.

l நீண்ட ஓர் ஊசலி (pendulum). ஓர் ஊசல் ஆட்ட ஆடுங் காலம் $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g}}$. இங்கு g புவிக்கவர்ச்சியாகும். l-ல் ஏற்படும் பிழை 2 நூற்று வீதம் எனின், T-ல் ஏற்படும் பிழை என்ன ?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\therefore \quad \delta T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \tfrac{1}{2} l^{-\frac{1}{2}}\, \delta l$$

l-ல் உள்ள பிழை $= 2$ நூற்று வீதம்

$$\therefore \frac{\delta l}{l} \times 100 = 2$$

$$\therefore \delta T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \quad \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}} \times \frac{2l}{100}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}} \quad \frac{1}{100}$$

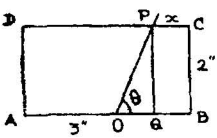
$$= \frac{T}{100}$$

$$\therefore \frac{\delta T}{T} \times 100 = 1$$

T-ல் ஏற்படும் நூற்றுவீதப் பிழை 1.

பயிற்சி 11.

$ABCD$ என்ற நீள் சதுர கோணளவில் (rectangular protractor) $AB = 6''$. $BC = 2''$. AB-ன் மையம் O. CD விளிம்பில் P குறி காட்டும் கோணம் BOP. θ பாகைகள் (degrees) அளக்கையில் விளிம்பில் சரியான இடத்திலிருந்து $\frac{1}{100}$ அங்குலம் தள்ளிக் குறி இருப்பின், கோணத்தில் ஏற்படும் பிழை $\frac{9 \sin^2 \theta}{10\pi}$ பாகைகள் என்று நிறுவுக.



படம் 19

PC ஐ x என்று கொள்வோம். P-லிருந்து AB-க்கு PQ குத்துக்கோடு வரைக.

அப்பொழுது $OQ = 3 - x$

$$\therefore \tan \theta = \frac{2}{3 - x}$$

ஆகவே, $$\sec^2 \theta \, \delta \theta = \frac{2}{(3 - x)^2} \delta x$$

$$= \frac{2}{4 \cot^2 \theta} \delta x$$

$$\therefore \delta \theta = \frac{\sin^2 \theta}{2} \delta x$$

$$b\,x = \frac{1}{100}\,\delta\,\theta \text{ ஆரையனில் அளக்கப்படுதலின்,}$$

$$\theta = \frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{1}{100} \text{ ஆரையன்}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2} \times \frac{1}{100} \times \frac{180}{\pi} \text{ பாகைகள்}$$

$$= \frac{9\sin^2\theta}{10\,\pi} \text{ பாகைகள்}$$

பயிற்சி 12.

முக்கோண ABC-ல் கோணம் Cஐ அளக்க வந்த அளவு 47°. முக்கோணத்தின் பரப்பினை $\frac{1}{2}\,ab\sin C$ என்ற வாய்ப்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடின், C-ன் அளவில் வந்த $10'$ பிழைக்குத் தக, பரப்பில் ஏற்படும் நூற்றுவீதப் பிழை என்ன ?

முக்கோணத்தின் பரப்பு Δ என்று கொள்வோம்.

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\,ab\sin C$$

இரு புறங்களிலும் மடக்கை எடுப்பின்,

$$\log\Delta = \log\tfrac{1}{2} + \log a + \log b + \log\sin G.$$

C ஒன்றிலேதான் பிழை ஏற்படுகிறது.

$$\frac{\delta\Delta}{\Delta} = \cot C\,\delta c$$

$$\Delta\text{-ல் ஏற்படும் நூற்று வீதப் பிழை} = \frac{\delta\Delta}{\Delta} \times 100$$

$$= \cot c.\ \delta\,c.\ 100$$

$$\delta\,c = 10' = \tfrac{1}{6} \times \frac{\pi}{180} \text{ ஆரையன்}$$

$$\Delta\text{-ல் ஏற்படும் நூற்று வீதப்பிழை} = \cot 47^\circ \times \frac{\pi}{6\times 180} \times 100$$

$$= \frac{5\pi}{54}\cot 47^\circ$$

101. பலமாறிகள் அடங்கிய வகையின் அண்ணளவு

$u = f(x, y)$ என்று கொள்வோம்.

அப்பொழுது, $\delta\,u = f x + \delta\,x, y + \delta\,y) - f(x, y)$

$$= f(x + \delta\,x, y + \delta\,y) - f(x, y + \delta\,y)$$

$$+ f(x, y + \delta\,y) - f(x, y)$$

$$= f\,a\,(x + \theta_1\,\delta\,x, y + \delta\,y)\,\delta\,x + f'\,(x, y + \theta_2\,\delta\,y)\,\delta\,y$$

இங்கு $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta < 1$

$\theta_1 \delta x, \theta \delta y$ மிகச் சிறியன வாதலின்

$\delta u = f'_x(x, y)\, \delta x + f'y\,(x, y)\, \delta x$ என்று கொள்ளலாம்.

ஆகவே, $\delta u = \frac{\delta f}{\delta x} \delta x + \frac{\delta f}{\delta y} \delta y$ அண்ணளவாக இது போன்றே $x_1 x$ .... x_n என்ற மாறிகளின் சார்பாக u இருப்பின், அண்ணளவாக

$$\delta u = \frac{\delta u}{\delta x} \delta x_1 + \frac{\delta u}{\delta x} \delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\delta u}{\delta x_n} \delta x_n$$

பயிற்சி 13.

ஒரு கோணத்தின் தன்மைநிறை W, நீரகத்து நிறை W_2 இவற்றால் அதன் ஆரை r-ன் கணக்கிடப்படின் r-ன் ஒப்புப்பிழை $\frac{\delta r}{r} = \frac{\delta w_1 - \delta w^2}{3\,(w_1 - w_2)}$ என்று நிறுவுக.

$w_1 - w_2 =$ விலகிய நீரின் நிறை.

$=$ கோள அளவு நீர் நிறை.

$= \frac{4}{3} \pi r^3 k.$

இங்கு, k ஒரு கன அளவு அலகின் (unit) நீர் நிறை.

$$\therefore \log \left(\frac{4 \pi k}{3}\right) + 3 \log r = \log (w_1 - w_2)$$

$$\therefore 3 \frac{\delta r}{r} = \frac{\delta w_1 - \delta w_2}{3\, w_1 - w_2}$$

ஆகவே, ஒப்புப்பிழை $\frac{\delta r}{r} = \frac{\delta w_1 - \delta w_2}{3\,(w_1 - w_2)}$

பயிற்சி 14.

ஒரு கம்பியின் விறைப்பு (rigidity) $N = \frac{8 \pi l I}{t^2 + r^4}$ என்ற வாய்பாட்டால் பெறப்படும். l, 2 நூற்று வீதம் குறைந்தும், r, 2 நூற்று வீதமும் t 1·5 நூற்று வீதமும் கூடியும் இருப்பின், அண்ணளவாக 13 நூற்று வீதம் குறையும் என்று காட்டுக.

2 நூற்று வீதம் l குறைகிறது $\qquad \therefore \frac{\delta l}{l} \times 100 = -2$

2 நூற்று வீதம் r கூடுகிறது $\qquad \therefore \frac{\delta r}{r} \times 100 = +2$

1·5 நூற்று வீதம் t கூடுகிறது $\qquad \therefore \frac{\delta t}{t} \times 100 = -1{\cdot}5$

$$N = \frac{8 \pi I l}{t^2 + r^4}$$

இருபுறத்தும் மடக்கை எடுப்பின்,

$$\log N = \log (8 \pi 1) + \log l - 2 \log t - 4 \log r$$

$$\therefore \frac{\delta N}{N} = \frac{\delta l}{l} - 2\frac{\delta t}{i} - 2\frac{\delta r}{r}$$

$$\therefore \frac{\delta N}{N} \times 100 = \frac{\delta l}{l} \times 100 - 2\frac{\delta t}{t} \times 100 - 2\frac{\delta r}{r} \times 100$$

$$= -2 - 2 \times 1{\cdot}5 - 4 \times 2$$

$$= -13$$

ஆகவே, N-ன் குறைவு 13%.

பயிற்சி 15.

முக்கோண ABC-ன் பரப்பு Δ, அதன் பக்கம் a, கோணங்கள் B, C, என்றவற்றால் கணக்கிடப்படுகிறது. B, C-ன் மதிப்பு சிறிது பிழைப்படுமெனின் முக்கோணத்தின் பரப்பில் ஏற்படும் பிழை $\frac{1}{2}(b^2 \delta C + c^2 \delta B)$ என்று நிறுவுக.

முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் a, b, c என்றும், கோணங்கள் A, B, C என்றும் இருப்பின்,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}.$$

இருபுறத்தும் மடக்கை எடுப்பின்,

$$\log \Delta = \log (\tfrac{1}{2} a^2) + \log (\sin B) + \log (\sin C) - \log (\sin A)$$

$$\therefore \frac{\delta \Delta}{\Delta} = \frac{\cos B}{\sin B} \delta B + \frac{\cos C}{\sin C} . \delta C - \frac{\cos A}{\sin A} . \delta A$$

$A + B + C = 180^\circ$ ஆதலின், $\delta A + \delta B = \delta C = 0.$

ஆகவே, $\dfrac{\delta \Delta}{\Delta} - \dfrac{\cos B}{\sin B} \delta B + \dfrac{\cos C}{\sin C} \delta c + \dfrac{\cos A}{\sin A} (\delta B + \delta C)$

$$= \left(\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos A}{\sin A}\right) \delta B + \left(\frac{\cos C}{\sin C} + \frac{\cos A}{\sin A}\right) \delta C$$

$$= \left(\frac{\sin (A + B)}{\sin A. \sin B}\right) \delta B + \frac{\sin (A + C)}{\sin A. \sin C} \delta C.$$

$$= \frac{\sin C}{\sin A \sin B} \delta B + \frac{\sin B}{\sin A. \sin C} \delta C$$

$\Delta - \frac{1}{2} b^2 \dfrac{\sin A. \sin C}{\sin B} = \frac{1}{2} c^2 \dfrac{\sin A. \sin B}{\sin C}$ என்பதால்,

$$\frac{\delta \Delta}{\Delta} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\delta B}{\Delta} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\delta C}{\Delta}$$

$$\therefore \delta \Delta = \tfrac{1}{2} (c^2 \delta B + b^2 \delta C).$$

பயிற்சி 16.

முக்கோணத்தின் பரபரப்பான Δ ஐ a, b என்ற பக்கங்களின் சார்பாக எழுதுக. அதனால் $\delta \Delta = R (\cos A. \delta a + \cos B \cdot \delta b + \cos C \delta c)$ என்று நிறுவுக.

$$\Delta = \sqrt{s(s - a) (s - b) (s - c)}$$

$$\therefore \log \Delta = \tfrac{1}{2} \log s + \tfrac{1}{2} \log (s - a) + \tfrac{1}{2} \log (s - b) + \tfrac{1}{2} \log (s - c)$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \frac{a + b + c}{2} + \tfrac{1}{2} \log \frac{b + c - a}{2} +$$

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{c + a - b}{2} + \tfrac{1}{2} \log \frac{a + b - c}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log (a + b + c) + \tfrac{1}{2} \log (b + c - a) +$$
$$\log (c + a - b) + \tfrac{1}{2} \log (a + b - c) - 2 \log 2$$

$$\therefore \quad \frac{\delta \Delta}{\Delta} = \Sigma \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \right) \delta a$$

$$= \Sigma \tfrac{1}{4} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \right) \delta a$$

$$= \Sigma \tfrac{1}{4} \left\{ \frac{s-a-s}{s(s-a)} + \frac{s-c+s-b}{(s-b)(s-c)} \right\} \delta a$$

$$= \tfrac{1}{4} \Sigma \left\{ -\frac{a}{s(s-a)} + \frac{a}{(s-b)(s-c)} \right\} \delta a.$$

$$= \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{s(s-a) - (s-b)(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} . \; a \, \delta a$$

$$= \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{s(b+c-a) - bc}{\Delta^2} a \, \delta a$$

$$= \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{(a+b+c)(b+c-a) - 2bc}{2\Delta^2} a \, \delta a$$

$$= \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\Delta^2} a \, \delta a$$

$$= \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{2\,bc \cos A}{2\Delta^2} a \, \delta a$$

$$= \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{abc}{\Delta^2} \Sigma \cos A . \; \delta a.$$

$$\therefore \quad \delta \Delta = \frac{abc}{4\Delta} (\cos A \, \delta a + \cos B \, \delta b + \cos C . \, \delta c)$$

$$= R (\cos A \, \delta a + \cos B \, \delta b + \cos C . \, \delta c)$$

பயிற்சிகள் 33.

1. ஒரு வாயுவின் அமுக்கம் P, பருவம் V, இவற்றின் தொடர்பு $PV^{1.4}$ = நிலையெண். பருமம் $\frac{1}{2}$ நூற்றுவீதம் குறைந்தால் P எவ்வளவு நூற்றுவீதம் கூடும்?

2. மின்னோட்டத்தின் அளவு மின்னோட்ட மானி (tangent galvanometer) யால் அளக்கும் பொழுது ஒதுக்கக் கோணத்தின் (angle of deflection) இருக்கைக்குத் (tangent) தக இருக்கும்.

45° உள்ள ஒதுக்கக் கோணத்தை அளக்கையில் ஏற்பட்ட பிழை ஒரு நூற்று வீதம் எனின், பின்னேட்ட அளவில் வரும் பிழை அண்ணளவாக $\frac{\pi}{2}$ என்று நிறுவுக,

3. ஒரு கோபுரத்தில் உயரம் அதன் அடிப்பாகத்திலிருந்து a அடி தள்ளிய இடத்து ஏற்றக் கோணம் θ-விலிருந்து கணக்கிடப்படும். ஏற்றக் கோண அளவில் வரும் பிழை $\delta\theta$ எனின் உயரத்தில் வரும் பிழை $\delta h = a \sec^2 \theta \, \delta \theta$ என்று நிறுவுக.

$a = 100$ அடி, $\theta = 30°$ கோணத்தில் ஏற்பட்ட பிழை 1 கலை எனின் $\delta h = \cdot 47$ அங்குலம் என்று நிறுவுக.

4. ஒரு வாயுவின் P அமுக்கமும், V பருமமும் $PV =$ நிலையெண் என்ற தொடரால் இணைக்கப்படும். 1000 கன அங்குல ஒரு சதுர அடிக்கு 20 ராத்தல் பட அமுக்குவதால் 999 க. அ. ஆயின், அமுக்கமும் அண்ணளவாக எவ்வளவு கூடும்?

5. முக்கோணம் ABC-ல் அளக்கப்பட்ட A 63°. அதன் பரப்பு $\frac{1}{2} bc \sin A$ என்ற வாய்பாட்டால் கணக்கிடப்படும். A-ன் அளவில் 15 கலை (minutes) பிழை எனின், பரப்பில் வரும் நூற்று வீதப் பிழை என்ன?

6. அதன் கோணங்கள் A, C, பக்கம் a-என்றிவற்றுல் முக்கோணம் ABC-ன் பரப்பு கணக்கிடப்படும். Aஐ அளக்கையில் வந்த பிழை δA எனின், பரப்பில் வரும் நூற்று வீதப் பிழை $\frac{100 \sin C. \delta A}{\sin A. \sin (A + C)}$ என்று நிறுவுக.

7. ஒரு நீள் வட்டத்தின் பாதி அச்சுகளான a, b-ல் பிழை ஏற்படுவதன் காரணமாக அதன் பரப்பு S-ன் ஏற்படும் பிழையை $\frac{\delta S}{S} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$ என்று சமன்பாட்டால் அறியலாம் என்று நிறுவுக.

8. ஒரு பொருளின் இயல்பு நிறை W_1, நீரகத்து நிறை W என்றிவற்றுல், அதன் செறிவு (density)(s) கணக்கிடப்படும். இந் நிறைகளில் δW, δW என்ற சிறு பிழைகள் வருமாயின், $\frac{\delta s}{s} = - \frac{W}{W_1 - W} \frac{\delta W_1}{W_1} = \frac{\delta W}{W - W}$ என்று நிறுவுக.

9. 32·4″ அடிப்பாகமும், 78, 82° அடிக்கோணங்களும் உடைய ஒரு முக்கோணத்தில் அடிப்பாகத்தில் வரும் பிழை 0·1 அங்குலத்திற்கு உடபட்டிருப்பின் பரப்பு அளவில் ஏற்படும் நூற்றுவீதப் பிழையின் எல்லை என்ன ?

10. ஓர் அடியின் (mirror) குவியத் தொலையை (focal length) $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{2}{f}$ என்ற வாய்ப்பாட்டால் அறியலாம். u, v என்பவற்றைக் காண்கையில் ஒவ்வொன்றிலும் பிழை K ஏற்படின் f-ல் ஏற்படும் ஒப்புப் பிழை $\frac{\delta f}{f}=K\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{u}\right)$ என்று நிறுவுக.

11. ஒரு மின்னோட்டத்தின் பிணர்வு (resistance $C=\frac{E}{R}$ என்ற வாய்பாட்டால் கணக்கிடப்படும். C, E என்பவற்றின் அளவீடுகள் முறையே 18 மின்னோட்டங்கள் (amperes), 110 மின்னேகங்கள் (volts) ஆகும். அவற்றின் அளவில் வந்த பிழைகள் முறையே $\frac{1}{10}$ மின்னோட்டகம், $\frac{1}{20}$ மின்னேகம் ஆயின், R-ல் ஏற்படும் பிழை என்ன ? நூற்று வீதப் பிழை எவ்வளவு வரை வரும் ?

12. l நீளமும் d விட்டமும் இரு இரு முனைத்தாங்களும் உடைய ஓர் இரும்புக் கம்பியின் நடுவில் W நிறை சுமத்தின், $\frac{W l^3}{d^3}$-க்குத்தக வளையும் 3 நூற்றுவீத நிறையையும், $1\frac{1}{2}$ நூற்று வீத நீளத்தையும், 1 நூற்று வீத விட்டத்தையும் கூட்டின் வளைவு எவ்வளவு நூற்று வீதம் கூடும் ?

13. $a°$ சாய்வாக v வேகத்தோடு எறிந்த ஒரு கல் போகும் தொலை R, $R^2=\frac{v^2\sin 2a}{G}$ என்ற வாய்பாட்டால் கணக்கிடப் படும். சாய்வு, வேகம் என்றிவற்றின் பிழைகள் முறையே 1, $\frac{1}{2}$ நூற்று விதம் ஆயின் R-ல் வரும் நூற்று வீதப் பிழை என்ன ?

14. முக்கோண ABCஐச் சிறிது மாற்றி ஒரே வட்டத்தில் வரைந்திருப்பின், $\frac{\delta a}{\cos A}+\frac{\delta b}{\cos B}+\frac{\delta c}{\cos C}=0$ என்று நிறுவுக.

15. முக்கோணத்தின் பரப்பை பக்கம் a கோணங்கள் B, C என்றிவற்றால் கணக்கிடுங்காலே, அவ்வளவுகளில் வரும் சிறுபிழை காரணமாகப் பரப்பில் ஏற்படும் ஒப்புப் பிழை $\frac{\delta \Delta}{\Delta} = 2\frac{\delta a}{a} + \frac{c}{a}\frac{\delta B}{\sin B} + \frac{b}{a}\frac{\delta c}{\sin C}$ என்று நிறுவுக.

16. முக்கோண ABC-ன் செங்கோடு AD, a, B, C யால், கணக்கிடப்படும். கோணங்களில் வரும் பிழைகள் δB, δC எனின், AD-ல் ஏற்படும் பிழை $\frac{\sin C}{\sin A \sin B}\,\delta B + \frac{\sin B}{\sin A \sin C}\,\delta c$ என்று நிறுவுக.

17. முக்கோணத்தின் பரப்பு அதன் பக்கங்களால் கணிக்கப்படும். பக்கம் a, a அளவு குறைக்கவும், பக்கம் b அவ்வளவு கூட்டவும் செய்யின் $\frac{\delta \Delta}{\Delta} = \frac{2(a-b)a}{c^2 - (a-b)^2}$ என்று நிறுவுக.

18. 15 அடி உயரமும், 25 அடி சாய்வுயரமும் கொண்ட ஒரு கூம்பினை அளந்தகாலே ஏற்படும் பிழைகள் ஒரு சதமானமாயின், கூம்பின் கன அளவில் வரும் பிழை எவ்வளவு?

19. ஒரு கூம்பின் அடிப்பாகமும் அடங்கிய பரப்பு A, அதன் உயரம் h, உச்சிக் கோணத்தின் பாதி a என்றிவற்றால் கணக்கிடப்படும். h, a-ல் வரும் பிழைகள் முறையே δh, δa எனின், அதற்குத்தக A-ல் ஏற்படும் பிழை என்ன?

மேலும் $a = \frac{\pi}{6}$ எனின், h-ல் வரும் ஒரு நூற்று வீதப் பிழையும், a வில் வரும் $-0^\circ{\cdot}33$ பிழையும் ஒருவாறு ஈடுசெய்து கொள்ளும் என நிறுவுக.

20. முக்கோண ABC-ன் பக்கங்களை அளந்தகாலே a, b, c, சிறிது கூடின் அதற்குத்தக A-ல் கூடுந்தொகை,

$$bc \sin A\, \delta A = -a(\cos C\, \delta b + \cos B\, \delta c - \delta a)$$

என்ற சமன்பாட்டால் அறியலாம் என்று நிறுவுக.

பக்கந்தோறும் ஏற்படும் பிழையின் எல்லைகள் $\pm \mu$ நூறு வீதம் எனின், A-ல் வரும் பிழையின் எல்லைகள் அண்ணளவாக, $\pm 1{\cdot}15\left(\frac{\mu\, a^2}{bc \sin A}\right)$ பாகைகள் என்று நிறுவுக.

9. தொடுவரையும் செங்கோடும்.

(Tangents and Normals)

102. தொடுவரையின் போக்கு (Direction of tangents)

$y = f(x)$ சமன்பாடுடைய வளைவரையில் (x, d) புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணம் θ ஆயின், அப் புள்ளிக்கண் $\frac{ay}{dx}$-ன் மதிப்பு $\tan\theta$ என்று நான்காவது அதிகாரத்தில் (56 ஆவது பகுதி) நிறுவினோம். இதனைப் பயன்படுத்தி ஒரு வளைவரையின் சமன்பாட்டிலிருந்து வளைவரைகளின் பண்புகளை அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) $y = 6 + x - x^2$ என்ற வளைவரையில் $(2, 4)$ இடத்துத் தொடுவரை, x ஆயத்தோடு பிறப்பிக்கும் கோணத்தினைக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2x$$

$(2, 4)$.ல் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பு $= 1 - 4 = -3$

$$\therefore \tan\theta = -3.$$

ஆகவே, $\theta = 160^\circ\ 34'$

(2) $x^3 + y^3 = 9$ வளைவரையில் $(2, 1)$ என்றவிடத்துத் தொடுவரையின் போக்கு என்ன ?

இச் சமன்பாட்டின் வகைக்கெழு காணின்,

$$3x^2 + 4y^3 \frac{dy}{ax} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

(2, 1) புள்ளியல் $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு = — 4

ஆகவே, தொடுவரை x ஆயத்தோடு கூடி $\tan^{-1}(-4)$ பிறப்பிக்கும்.

103. ஆதி (origin) வழியாக ஒரு வளைவரை செல்லின் அவ்விடத்து $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பிலிருந்து அதன் உருவத்தினைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக (1) $y^2 = 4ax$ வளைவரை ஆதி வழியாகச் செல்லும். இங்கு $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$.

ஆகவே, (0, 0)-ல் $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு முடிவற்ற எண்ணாகும்.

$$\tan\theta = \infty$$

$$(\text{அ.து.})\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

ஆகவே, (0, 0) இடத்துத் தொடுவரை x ஆயத்துக்குச் செங்குத்தாகும். அஃதாவது (0, 0) இடத்துத் தொடுவரை y ஆயமாகும்.

(2) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$ வளைவரையில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\,2x - x^2\,2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$\therefore \quad \text{ஆதியில் அஃதாவது } (0, 0)\text{-ல் } \frac{dy}{dx} = 0$$

ஆகவே, $\theta = 0$.

∴ ஆதியிடத்து x ஆயத்தை வளைவரை தொடுகிறது.

(3) வளைவரையொன்றில் (0, 0)-ல் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பு ஒன்று எனக் கொள்ளின்,

$$\tan\theta = 1$$
$$\therefore \quad \theta = 45^\circ$$

ஆகவே, ஆதியிடத்துத் தொடுவரை ஆயங்களின் இடைப்பட்ட கோணத்தைச் சமமாகப் பிரிக்கிறது.

பயிற்சி 1.

$y = x^3 - 12x + 18$ வளைவரையில் எப் புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை x ஆயத்தோடு ஒருபோகு வரையாக அமையும்,

$$y = x^3 - 12x + 8$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12$$

$$= 3(x^2 - 4)$$

தொடுவரையும் x ஆயமும் ஒரு போகுக்கோடுகள்.

$\therefore \theta = 0$ ஆகவே, $\tan \theta = 0$.

அப்பொழுது, $3(x^2 - 4) = 0$

$\therefore x = \pm 2$.

அப்பொழுது, $y = 2$ அல்லது 34.

ஆகவே, $(2, 2)$, $(-2, 34)$ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரை x ஆயத்தோடு ஒரு பேரகுவரையாக அமையும்.

பயிற்சி 2.

$x^2 + y = 5$-ல் எப்புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை $2x - y + 6 = 0$ என்ற கோட்டின் ஒரு போகாக அமையும்?

$$x^2 + y^2 = 5$$

வகைக்கெழு காணின் $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

(x, y)-ல் தொடுவரையின் சாய்வு வீதம் $= -\frac{x}{y}$

$2x - y + 6 = 0$-ன் சாய்வு வீதம் $= 2$

ஆகவே, $-\frac{x}{y} = 2$. அஃதாவது $x = -2y$

இம் மதிப்பை $x^2 + y^2 = 5$-ல் ஈடாக்கின்,

$$4y^2 + y^2 = 5$$

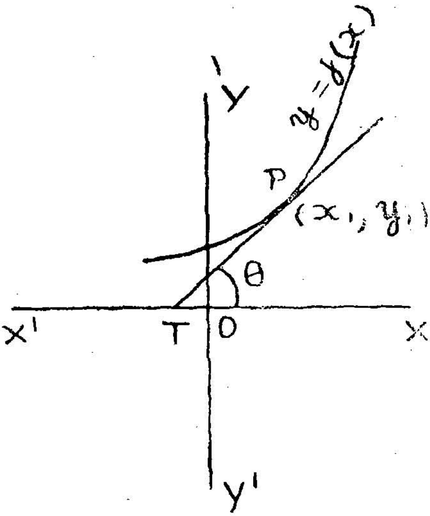
$$\therefore y^2 = 1$$

$\therefore y = \pm 1$ அந் நிலையில் $x = \pm 2$

$\therefore (-2, 1)$, $(2, -1)$ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் $2x - y + 6 = 0$ வரையோடு ஒரு போகுவரைகளாக அமைகின்றன.

104. தொடுவரையின் சமன்பாடு

வளைவரையின் சமன்பாடு $y = f(x)$ என்றும், P-ன் ஆயத் தொலைகள் $x_1\ y_1$ என்றும் கொள்ளுமிடத்து,



படம்-20

$\tan\theta = (x_1, y_1)$-ல் $\left(\frac{dy}{dx}\right)$-ன் மதிப்பு. இதனை $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ என்று குறிப்பிடுவோம். தொடுவரையின் சாய்வு வீதம் 'm' $= \tan\theta$ ஆகவே, P இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 (x - x_1)$$

105. செங்கோட்டின் சமன்பாடு (Normal)

P இடத்து PT தொடுவரைக்குச் செங்குத்தாக P வழிச் செல்லும் கோடு செங்கோடு (Normal) எனப்படும்.

(x_1, y_1) வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

தொடுவரை PT-ன் 'm' $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_1$

இக் கோடு தொடுவரைக்குச் செங்குத்தாதலின்

$$m\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -1$$

$$m = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_1}$$

ஆகவே, செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$(y - y_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 + (x - x_1) = 0.$$

106. வளைவரையின் சமன்பாடு $x = y(\theta)$, $y = d(\theta)$ என்றிருப்பின், $(x_1 y_1)$ இடத்துத் தொடுவரையின் சன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{y - y_1}{\frac{dy}{d\theta}}$$

$$\text{ஏனெனில், } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta}$$

இதனுல் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$(x - x_1) \dfrac{dx}{d\theta} + (y - y_1) \dfrac{dy}{d\theta} = 0$ என்று எளிதிற் காணலாம்.

பயிற்சி 5.

$y = \dfrac{6x}{x^2 - 1}$ வளைவரையில் (2, 4) இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 1)\, 6 - 6x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= -6 \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

(2, 4)-ல் $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{10}{3}$

ஆகவே, தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y - 4 = -\frac{10}{3}(x - 2)$$

(அ-து.) $10x + 3y - 32 = 0$.

பயிற்சி 4.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$-ல் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

இச் சமன்பாட்டின் வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

$$(x_1y_1)\text{-ல் } \left(\frac{dy}{dx}\right)\text{-ன் மதிப்பு} = -\frac{b^2x_1}{a^2y}$$

(x_1y_1) இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

$$a^2\,yy_1+b^2xx_1=a^2y_1^2+b^2x_1^2$$

$a^2\ b^2$ ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-ல் (x_1, y_1) இருத்தலின்,

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

ஆகவே, தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{b^2}=1.$$

பயிற்சி 5.

$y=2x$-க்கு ஒரு போகு வரையாக இருக்கும் $y=x^4-6x^3+13x^2-10x+5$-ன் தொடுவரைகள் யாவை? அவற்றின் தொடு குத்துகளைக் காண்பதோடு, அவற்றில் இரு புள்ளியிடத்துத் தொடுவரைகள் ஒரே கோடாகும் என நிறுவுக.

$(x_1\,y)$ இடத்துத் தொடுவரை $y=2x$ கோட்டோடு ஒரு போகு ஆகும் என்று கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx}=4x^3-18x^2+26x-10$$

$(x_1 y_1)$ இடத்துத் தொடுவரையின்

$$'m' = 4x_1^3 - 18x_1^2 + 26x_1 - 10$$

தொடுவரையும், $y = 2x$-ம் ஒரு போகுக் கோடுகள்.

$$\text{ஆதலின்},\ 4x_1^3 - 18x_1^2 + 26x_1 - 10 = 2$$

$$\text{அஃதாவது}\ 2x_1^3 - 9x_1^2 + 13x_1 - 6 = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_1 - 2)(2x_1 - 3) = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = 1 \text{ அல்லது } 2 \text{ அல்லது } \frac{3}{2}$$

இம் மதிப்புகளுக்கு எதிர் நிலையான y-ன் மதிப்புகள்

$$3,\ 5,\ \frac{65}{16}.$$

வளைவரையில் $(1, 3)$, $(2, 5)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{65}{16}\right)$ இப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் $y = 2x$-க்கு ஒருபோகு ஆகும்.

$(1, 3)$ இடத்துத் தொடுவரை $y - 3 = 2(x - 1)$

$$(\text{அ-து.})\ y - 2x - 1 = 0.$$

$(2, 5)$ இடத்துத் தொடுவரை $y - 5 = 2(x - 2)$

$$(\text{அ-து.})\ y - 2x - 1 = 0.$$

$\left(\frac{3}{2} = \frac{65}{16}\right)$ இடத்துத் தொடுவரை

$$y - \frac{65}{16} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$(\text{அ-து.})\ y - 2x - \frac{17}{16} = 0.$$

ஆகவே, $(1, 3)$, $(2, 5)$ இடத்துத் தொடுவரைகள் வேறு வேறு கோடுகள் அல்ல.

பயிற்சி 6.

$x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ வளைவரையில் 'θ' புள்ளியிடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\div\frac{dx}{d\theta}$$

$$=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\cot\theta/2$$

'θ' இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y-a(1-\cos\theta)=\cot\theta/2\left\{x-a(\theta-\sin\theta)\right\}$$

$$y-2a\sin^2\theta/2=(x-a\theta)\cot\theta/2+2a\cos^2\theta/2$$

$$\therefore\quad y-2a=(x-a\theta)\cot\theta/2.$$

குறிப்பு : தொடுவரையின் சமன்பாட்டினை இயன்ற அளவு சுருக்கி எழுதவேண்டும்.

107. வளைவரை இரண்டின் இடைப்பட்ட கோணம்

இரு வளைவரைகள் வெட்டும் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம், வளைவரை வெட்டும் கோணம் எனப்படும்.

$y=m_1x+c$, $y=m_2x+c$ சமன்பாடுடைய இரு கோடுகளின் இடைக்கோணம் θ எனின்,

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

வெட்டும் புள்ளிகளிடத்து இவ்விரு வளைவரைகளைச் சார்ந்த $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்புகள் அப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளின் சாய்வு வீதங்கள் (gradient) ஆகும். ஆகவே, மேற் சொல்லிய வாய்பாட்டில் m_1, m_2-க்குப் பதிலாக இம் மதிப்புகளைக் கொடுப்பின் $\tan\theta$ வரும்.

பயிற்சி 7.

$y = x^2 - 3x$, $9y = 2x^2 - 4x + 20$] வளைவரைகளில் வெட்டும் கோணங்கள் யாவை ?

வளைவரைகள் வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்பதற்கு இவ் விரு சமன்பாடுகளை விடுவிப்பின் அப் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் வரும்.

$$9(x^2 - 3x) = 2x^2 - 4x + 20$$

(அ-து.) $7x^2 - 23x - 20 = 0$

(அ-து.) $(x - 4)(7x + 5) = 0$

$\therefore x = 4$ அல்லது $-5/7$

இம் மதிப்புகளுக்கு எதிர் நிலையான y-ன் மதிப்புகள்

4 அல்லது $\frac{130}{49}$

$\therefore$ வெட்டும் புள்ளிகள் $(4, 4), \left(-\frac{5}{7}, \frac{130}{49}\right)$

முதல் வளைவரையில் $\frac{dx}{dy} = 2x - 4$

$(4, 4)$-ல் $\frac{dx}{dy} = 4$

இரண்டாவது வளைவரையில் $9\frac{dy}{dx} = 4x - 4$

$(4, 4)$-ல் $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}$

$(4, 4)$-ல் $\tan\theta = \frac{4 - \frac{4}{3}}{1 + 4 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{8}{19}$.

இவ்வாறே, $\left(-\frac{5}{7}, \frac{130}{49}\right)$-ல் வெட்டுங்கோணத்தைக் காணலாம்

பயிற்சி 8.

$x^2 = ay$, $x^3 + y^3 = 3axy$ வளைவரைகள் வெட்டும் கோணங்கள் யாவை ?

$x^2 = ay$-ல் y-ன் மதிப்பை $x^3 + y^3 = 3xy$-ல் ஈடு கொடுத்தால்,

$$x^3 \frac{1}{4} + \left(\frac{x^2}{a}\right)^3 = 3ax.\frac{x^2}{a}.$$

$$(\text{அ-து.})\ 2x^3 - \frac{x^6}{a^3} = 0.$$

$$x = 0 \text{ அல்லது } 2^{\frac{1}{3}}a$$

இந்த x-ன் மதிப்புகளை $x^2 = ay$-ல் ஈடு கொடுப்பின்,

$$y = 0 \text{ அல்லது } 4^{\frac{1}{2}}a.$$

ஆகவே, இவ்விரு வளைவரைகள் $(0, 0)$, $(2^{\frac{1}{3}}a, 4^{\frac{1}{3}}a)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன.

$x^2 = ay$-ன் வகைக்கெழு காணின் $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{a}$.

இரண்டாவது வளைவரையில் $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

$(0, 0)$-ல் முதல் வளைவரையில் $\frac{dy}{dx} = 0$.

இரண்டாவது வளைவரையில் $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ (தேரப்பெறு மதிப்பு). ஆகவே, $(0, 0)$ உள்ள கோணத்தை இம் முறைப்படி காண இயலாது.

$(2^{1/3}a, 4^{1/3}a)$-ல் முதல் வளைவரையில் $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \times 2^{1/3}}{a} = 2^{4/3}$

,, இரண்டாவது வளைவரையில் $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 4^{1/3} - 2^{2/3}a^2}{4^{2/3}a^2 - 2^{1/3}a^2} = 0$

$$\therefore \tan\theta = 2^{4/3} = 2.2^{1/3}$$

$$\therefore \theta \tan^{-1} = (2.2^{1/3})$$

பயிற்சி 9.

$ax^2+by^2=1$, $Ax^2+By^2=1$ என்ற கூம்பு வெட்டிகள் (conics) செங்கோணமாக வெட்டின்

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}$ என்று நிறுவுக.

இவ்விரு வளைவரைகள் வெட்டும் புள்ளிகளுள் ஒன்று (x_1, y_1) என்று கொள்வோம்.

அப்பொழுது, $ax_1^2+by_1^2-1=0$

$$Ax_1^2+By_1^2-1=0$$

$$\therefore \frac{x_1^2}{B-b}=\frac{y_1^2}{a-A}$$

ஆகவே, $\frac{x_1^2}{y_1^2}=\frac{B-b}{a-A}$

வளைவரைகளின் சமன்பாடுகளுக்கு வகைக்கெழு காணின,

$$2ax+2by\frac{dy}{dx}=0 \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{ax}{by}.$$

$$2Ax+2By\frac{dy}{dx}=0 \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{Ax}{By}.$$

$(x_1 y_1)$ இடத்துத் தொடுவரைகளின் 'm'

$$-\frac{ax_1}{by_1}, -\frac{Ax_1}{By_1}$$

தொடுவரைகள் வெட்டுக் கோணம் 90°.

இதனால், இரு தொடுவரைகளின் 'm'-ன் பெருக்கத் தொகை $=-1$

$$\therefore \frac{aAx_1^2}{bBy_1^2}=-1.$$

$\frac{x_1^2}{y_1^2}$-ன் மதிப்பு இங்கு ஈடாகக் கொடுப்பின்,

$$\frac{aA}{bB}\left(\frac{B-b}{a-A}\right)=-1.$$

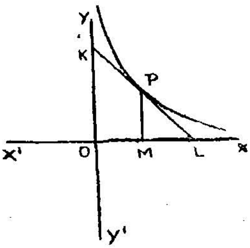
$$(\text{அ-து.})\ \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}.$$

108. வளைவரைகளின் தொடுவரைகள் செங்கோடுகளின் சில பண்புகளை அவற்றின் சமன்பாடுகளால் அறியும் முறையைப் பின்வரும் பயிற்சிகள் விளக்கும்.

பயிற்சி 10.

(1) நெடு நிலைக்குத் தொடுவரைகள் (asymptotes) வெட்டிய தொடுவரையின் நீளத்தைத் தொகுத்து (point of contact) சமமாகப் பிரிக்கும் என்றும்.

(2) நெடு நிலைக்குத் தொடுவரை இரண்டும், தொடுவரையும் ஒன்றுகூடிய முக்கோணத்தின் பரப்பு மாறுது என்றும், $xy = c^2$ என்ற அதிபரவளையத்தில் (hyperbola) நிறுவுக.



படம்-21

அதிபரவளையம் $xy=c^2$-ன் நெடுநிலைக் குத்துக் தொடுவரைகள் ஆயங்களாகும். P ஐ (x_1, y_1) என்று கொள்வோம். $xy = c^2$-ன் வகைக்கெழு காணின்,

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

ஆகவே, P இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{x_1}(x - x_1).$$

$$(\text{அ-து.})\quad \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2.$$

இத் தொடுவரை L, K என்ற புள்ளிகளில் ஆயங்களை வெட்டுவதாகக் கொள்வோம்.

P-ன் குத்தாயம் அஃதாவது y ஆயத்தொலை MP தொடுவரை x ஆயத்தை வெட்டும் இடத்தில்,

$$y = 0 \therefore \frac{x}{x_1} = 2$$

அஃதாவது $OL = 2x_1 = 2\,OM.$

$$KL = 2\,KP$$

ஆகவே, KL-ன் நடுப்புள்ளி P.

மேலும் தொடுவரை y ஆயத்தில் வெட்டும் இடத்தில்

$$x = 0 \quad \therefore \quad \frac{y}{y^1} = 2$$

$$\therefore \quad OK = 2y_1.$$

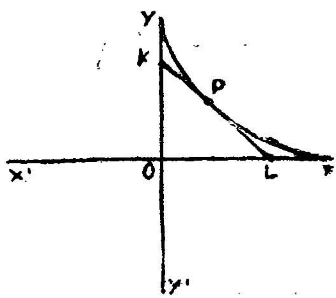
$$\text{முக்கோண } KOL\text{-ன் பரப்பு} = \tfrac{1}{2}\, OK \cdot OL$$
$$= \tfrac{1}{2}\, 2y_1 \cdot 2x_1$$
$$= 2\, x_1 y_1 = 2\, c^2$$

ஆகவே, முககோண KOL-ன் பரப்பு P-ன் ஆயத்தொலைகளைப் பொறுத்ததன்று.

பயிற்சி 11.

ஆயங்களின் இடைப்பட்ட $x = a \cos^3 \theta \; y = a \sin^3$ வளைவரையின் தொடுவரைப் பகுதி நீளம் a என்று நிறுவுக.

P 'θ' என்றும், அவ்விடத்துத் தொடுவரை ஆயங்களை வெட்டும் புள்ளிகள் L. K என்றும் கொள்வோம்.



$$x = a \cos^3 \theta \; y = a \sin^3 \theta$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{dy}{d\theta} \quad — \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{3a \sin^2 \theta \cos \theta}{-3a \cos^2 \theta \sin \theta}$$

$$= -\tan \theta$$

ஆகவே, P இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு

$$y - a \sin^3 \theta = -\tan \theta\, (x - a \cos^3 \theta)$$

அஃதாவது $x \tan \theta + y = a \sin^3 \theta + a \sin \theta \cos^2 \theta$

$$= a \sin \theta$$

இங்கு y-க்குப் பதில் O ஐ ஈடாகக் கொடுப்பின், OL-ன் நீளத்தைக் காணலாம்.

$$OL = \frac{a \sin \theta}{\tan \theta} = a \cos \theta$$

இச் சமன்பாட்டில், $x = 0$ என்று எடுப்பின், OK-ன் நீளத்தைக் காணலாம்.

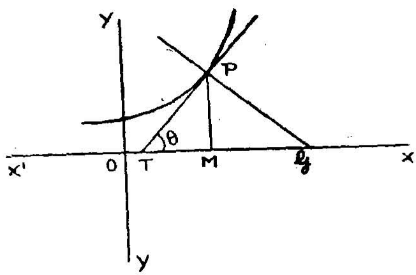
$$OK = a \sin \theta$$

$$KL^2 = OL^2 + OK^2$$

$$= a$$

$$KL = a.$$

109. கிளைத்தொடுவரை, கிளைச்செங்கோடு (sub-tangent, sub-normal)



படம்-23

P இடத்துத் தொடுவரையும், செங்கோடும் x ஆயத்தை முறையே T, G என்ற புள்ளிகளில் வெட்டின், TM கிளைத் தொடுவரை (Sub-tangent) என்றும். MG ஐக் கிளைச் செங்கோடு (Sub-Normal) என்றும் கூறப்படும். இங்கு P-ல் இருந்து x ஆயத்துக்கு வரையும் செங்கோட்டின் அடி M ஆகும்.

$$\text{கிளைத் தொடுவரை} = TM = MP \cot \theta = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\text{கிளைச் செங்கோடு} = MG = MP \tan \theta = y. \ \frac{dy}{dx}.$$

$$\text{தொடுவரை} = TP = MP \operatorname{cosec} \theta = y \sqrt{1 + \cot^2 \theta}$$

$$y = \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$= y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \div \frac{dy}{dx}$$

$$\text{செங்கோடு} = PG = MP \sec \theta = MP \sqrt{1 + \tan^2\theta}$$

$$= y \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

பயிற்சி 12.

$y^2 = 4ax$ பரவளையத்து எல்லாப் புள்ளிகளிடத்தும் கீழ்த் தொடுவரை x ஆயத்தொலையின் இருமடங்கு என்றும், கீழ்ச் செங்கோடு மாறுவியல்பினது என்றும் நிறுவுக.

$$y^2 = 4\,ax.$$

இவ்விடத்து வகைக்கெழு காணின்,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$\text{கீழ்த்தொடுவரை} = \frac{y}{\frac{ay}{dx}} = \frac{y^2}{2a} = \frac{4\,ax}{2a} = 2$$

$= x$ ஆயத்தொலையின் இருமடங்கு.

$$\text{கீழ்ச் செங்கோடு} = y.\,\frac{dy}{dx} = y.\,\frac{2a}{y} = 2a$$

$=$ நிலைஎண்.

பயிற்சி 13.

$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ என்ற வளைவரையில் (a, a) புள்ளியிடத்துக் கிளைத்தொடுவரை, கிளைச்செங்கோடு, தொடுவரை, செங்கோடு என்றிவற்றைக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\,a\,x^2 - x^3}{y\,(2\,a - x)^2}$$

ஆகவே, (a, a)-ல் $\frac{dy}{dx} = \frac{3\,a^3 - a^3}{a\,(2\,a - a)^2} = 2$

கிளைத்தொடுவரை $= \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{a}{2}$

கிளைச் செங்கோடு $= y.\frac{dy}{dx} = 2\,a$

தொடுவரை $= y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \div \frac{dy}{dx} = a\sqrt{2}$

செங்கோடு $= y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a\sqrt{5}.$

பயிற்சி 14.

$y = c \cosh \frac{x}{c}$ என்ற கயிற்று வளையில் (catenary)

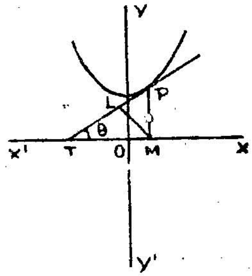
(1) செங்கோட்டின் நீளம் $\frac{y^2}{c}$ என்றும், (2) குத்தாய (ordinate) அடியிலிருந்து தொடுவரைத் தொலைவின் நீளம் மாறாதது என்றும் நிறுவுக.

Pஐ (x, y) என்று கொள்வோம்.

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx}$$

$$y = c \cos h \frac{x}{c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin h \frac{x}{c}$$



படம் - 2 +

செங்கோட்டின் நீளம்

$$= y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= y \sqrt{1 + \sin h^2 \frac{x}{c}}$$

$$= y \cos h\, x/c$$

$$= \frac{y^2}{c}$$

$$Lm = MP \cos \theta$$

$$= y \cos \theta$$

$$= y \int \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= y \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \frac{c \cos h\, x/c}{\sqrt{1 + \sin h^2\, x/c}}$$

$$= c$$

பயிற்சிகள் 34.

(1) பின்வரும் வளைவரைகள் தோறும் காட்டிய புள்ளி இடத்துத் தொடுவரை, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க:

(1) $y = x^3$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$-ல்

(2) $x^2 + 5y^2 = 14$ (3, 1-ல்)

(3) $y = a \log \sin x$, $(x_1 y_1)$-ல்.

(4) $x = \sin t, y = \cos 2t$, $t = \frac{\pi}{6}$ -ல்.

(5) $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t$, '$t$'-ல்.

(2) பரவளையம் $y^2 = 4ax$-ல் புள்ளி $(at^2, 2at)$ இடத்துத் தொடுவரை செங்கோடு என்பவற்றின் சமன்பாடுகள்முறையே

$y = \frac{x}{t} + at, y + tx = 2at + at^3$ என்று நிறுவுக.

(3) நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ல் புள்ளி $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ இடத்துத் தொடுவரை, செங்கோடு என்பவற்றின் சமன் பாடுகள் முறையே, $\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1$

$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2$ என்று நிறுவுக.

(4) $x^3 + y^3 = 3axy$ என்ற வளைவரையைப் பரவளையம் $ay = x^2$ வெட்டும் புள்ளிகளிடத்து முதல் வளைவரையின் தொடுவரைகள் x ஆயத்திற்கு ஒருபோகுக் கோடுகளாகும் என்று நிறுவுக.

(5) ஆதி இடத்து $y = 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x$ வளைவரையின் தொடுவரைச் சமன்பாடுகளைக் காண்க. அவ்வளைவரையின் தொடுவரைகளுள் எவை x ஆயத்திற்கு ஒருபோக்குக் கோடுகளாகும்? அத்தொடுவரைகளின் தொடுகுத்துகள் யாவை?

(6) $y = b e^{-x/a}$ வளைவரை y ஆயத்தைக் கடக்கும் இடத்து $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ அதன் தொடுவரையாகும் என்று நிறுவுக.

(7) $\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$ வளைவரையை

$p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ கோடு தொடின், $p^n = (a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n$ என்று நிறுவுக.

(8) $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ வளைவரையின் தொடுவரைகள் ஆயங்களோடு பிறப்பிக்கும் வெட்டுத்துண்டுகளின் (inter cepts) கூட்டுத்தொகை a என்று நிறுவுக.

(9) $x=a\cos^4\theta,\ y=a\sin^4\theta$ வளைவரையில் சமன்பாடு யாது? இத்தொடுவரை ஆயங்களை வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆதியிலிருந்து தொலைகளின் கூட்டுத்தொகை மாறாதது என நிறுவுக.

(10) $y^2 = \dfrac{x^3}{2-x}$ வளைவரையின் (1, 1) இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாடு யாது? அத் தொடுவரையின் வளைவரையை வெட்டும் வேறு புள்ளி எது? (1, 1) இடத்துத் தொடுவரை, செங்கோடு, $x=2$ என்றவரை இம் மூன்றால் அமைந்த முக்கோணத்தின் பரப்பு யாது?

(11) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3}=1$-ல் (x, y) இடத்துத் தொடுவரை ஆயங்களோடு கூடிப் பிறப்பிக்கும் வெட்டுத் துண்டுகள் x_1, y_1 எனின், $\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$ என்று நிறுவுக.

(12) வளைவரையில் இருக்கும் ஒருபுள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $x=3\cos\theta-\cos^3\theta$

$y=3\cos\theta-\sin^3\theta$

அவ் வளைவரையில் ஏதாவது ஒரு புள்ளி இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ என்று வரும் புள்ளி இடத்துச் செங்கோடு ஆதி வழிச் செல்லும் என்று நிறுவுக.

(13) $x=a(\theta+\sin\theta),\ y=a(1+\cos\theta)$ என்ற சமன்பாடுகளைக் கொண்ட ஒரு வளைவரையில் θ இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. 'θ', '$\theta+\pi$' என்றவற்றின் நேர் நிலையான புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 90° என்று நிறுவுக.

(14) $x=a(\theta\times\sin\theta),\ y=a(1\ \cos\theta)$ வளைவரையில் 'θ' இடத்துத் தொடுவரையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. 'θ' இடத்துச் செங்கோடு $(a\theta, 2a)$ வழிச் செல்லும் என்று நிறுவுக.

(15) $y=6+x-x^2,\ y\ (x-1)=x\times 2$ வளைவரைகள் (2, 4)-ல் தொடுவன என்று நிறுவி இப் புள்ளியிடத்துப் பொதுத் தொடுவரைக்குச் சமன்பாடு காண்க.

(16) $x^m y^n = a^{m+n}$ வளைவரையில் ஆயங்கள் வெட்டிய தொடுவரைப் பகுதியை நிலைத்த தகவுடைய இரு பகுதிகளாகத் தொடு குத்து (point of contact) பிரிக்கும் என்று நிறுவுக.

(17) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ வளைவரையின் தொடுவரை, செங்கோடு ஆகிய இவற்றிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் நேர்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே p, q எனின், $4p^2+q^2=a^2$ என்று நிறுவுக.

(18) $x^2-y^2=2a^2$, $x^2+y^2=4a^2$ வளைவரைகள் வெட்டுங் கோணத்தைக் காண்க.

(19) $x^2 + y^2 = a(x - y)$ வட்டம் ஆயங்களை வெட்டுங் கோணங்கள் யாவை?

(20) $y^2=4ax$, $cy^2=x^3$ எக் கோணங்களில் வெட்டும்?

(21) $y=x^2$, $6y=7-x^2$ வளைவரைகள் செங்கோணத்தில் வெட்டும் என்று நிறுவுக.

(22) $yx^2=(x+y)^2$ வளைவரையை $x=c$ கோடு செங்கோணத்தில் வெட்டின், c-ன் மதிப்பு யாது?

(23) நீள் வட்டம் $4x^2 + 9y^2 = 72$, அதிபரவளையம் $x^2-y^2=5$. இவ்விரண்டும் செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும் என்று நிறுவுக.

(24) $y=a^x$-ன் கிளைத் தொடுவரையின் நீளம் மாருது என்று நிறுவுக.

(25) $by^2=(x+a)^3$-ன் கிளைத் தொடுவரையின் இருபடி, கிளைச் செங்கோட்டுக்குத் தக வேறுபடும் என்று நிறுவுக.

(26) $y=be^{\frac{x}{a}}$-ன் கிளைத் தொடுவரை மாருதது என்றும், கிளைச் செங்கோடு $\frac{y^2}{a}$ என்றும் நிறுவுக.

(27) $\log y = x \log a$-ன் கிளைத் தொடுவரை மாருதது என்று நிறுவுக.

(28) $y=be^{-\frac{x}{a}}$-ன் கிளைத் தொடுவரை x ஆயத்தொலையின் இருபடிக்குத் தக வேறுபடும் என்று நிறுவுக.

(29) $xy = c^2$ அதிபர வளையத்தில் கிளைச் செங்கோடு ஆயத் தொலையின் முப்படிக்குத் தகவும், கிளைத்தொடு வரை x ஆயத் தொலைக்குத் தகவும் வேறுபடுவன என்று நிறுவுக.

(30) $x^m y^n = a^{m+n}$ வளைவரையில் கிளைத்தொடுவரை ஆயத் தொலைக்குக் தக வேறுபடும் என்று நிறுவுக.

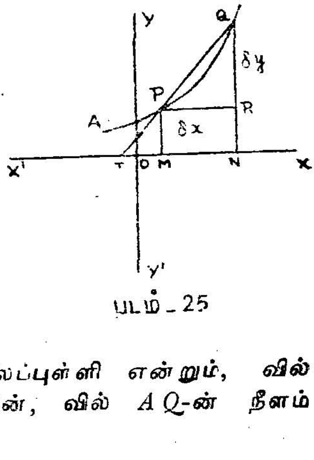
(31) $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ வளைவரையில் 'θ' இடத்துக் கிளைத் தொடுவரை, கிளைச் செங்கோடுகள் யாவை ?

(32) $x = a\cos\theta \times \theta\sin\theta)$, $y = a\ (\sin\theta - \theta\cos\theta)$ வளைவரையில் 'θ' இடத்துக் கிளைத்தொடுவரை, கிளைச் செங்கோடுகள் யாவை?

(33) $y = a\ \log\ (a^2 - x)$ வளைவரையில் தொடுவரை, கிளைத் தொடுவரை என்றிரண்டின் கூட்டுத் தொகை ஆயத் தொலைகளின் பெருக்கத் தொகைக்கு தக வேறுபடும் என்று நிறுவுக.

110. $y = f(x)$ வளைவரை வில்லின் நீளத்து வகைக்கெழு

$\dfrac{ds}{dx}$, $\dfrac{ds}{dy}$-ன் மதிப்புகள்



படம் - 25

$y = f(x)$ வளைவரையில் (x, y) P என்றும், அதற்கு மிக நெருங்கிய புள்ளி Q என்றும் கொள்ளின், Q-ன் ஆயத் தொலைகள் $(x + \delta x,\ y + \delta y)$ என்று கொள்ளலாம்.

[illegible] வளைவரையில் A ஒரு நிலைப்புள்ளி என்றும், வில் AP-ன் நீளம் s என்றும் கொள்ளின், வில் AQ-ன் நீளம் $s + \delta s$.

ஆகவே, வில் $PQ = \delta s$.

சுன்னத்தை δx நெருங்கும் பொழுது Pஐ Q நெருங்கும். அந் நிலையில், வில் PQ, நாண் PQ இவற்றின் நீளங்களின் வேற்றுமை மிகவும் சிறிதாகும். ஆகவே, $\delta x \to 0$ என்றிருக்கும் பொழுது $\frac{\text{வில் } PQ}{\text{நாண் } PQ} \to 1$ என்று கொள்வோம்.

PQR செங்கோண முக்கோணத்தில்

$$(\text{நாண் } PQ)^2 = PR^2 + QR^2$$

$$= (\delta x)^2 + (\delta y)^2$$

இருபுறங்களையும் $(\delta x)^2$ ஆல் வகுப்பின்,

$$\left(\frac{\text{நாண் } PQ}{\delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)$$

$$(\text{அதாவது}) \left(\frac{\text{நாண் } PQ}{\text{வில் } PQ}\right)^2 \left(\frac{\text{வில் } PQ}{\delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2$$

$\delta x \to 0$ என்ற நிலையில் எல்லை காணின்,

$$\operatorname*{Lt}_{\delta x \to 0} \frac{\text{நாண் } PQ}{\text{வில் } PQ} = 1 \; ; \quad \operatorname*{Lt}_{x \to 0} \frac{\text{வில் } PQ}{\delta x} = \frac{ds}{dx}$$

$$\operatorname*{Lt}_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{py}{dx}.$$

$$\text{ஆகவே, } \left(\frac{ds}{dx}\right) = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

இது போன்றே $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{ax}{dy}\right)^2}$ என்று எளிதில் நிறுவலாம்.

பயிற்சி 15.

$x = a\ (\theta + \sin\theta)$, $y = a\ (1 - \cos\theta)$ என்ற உருள் வளையில் (cycloid) $\frac{ds}{dx}$ காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta}$$

$$= \frac{a \sin\theta}{a\ (1 + \cos\theta)}$$

$$= \tan\theta/2$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \tan^2\theta/2}$$

$$= \sec\theta/2$$

பயிற்சிகள் 35.

(1) $y^2 + 4ax$ பரவளையத்தில் $\frac{ds}{dx} = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^2$ என்று நிறுவுக.

(2) பின் வரும் வளைவரை தோறும் $\frac{ds}{dx}$ காண்க :

(1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

(2) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

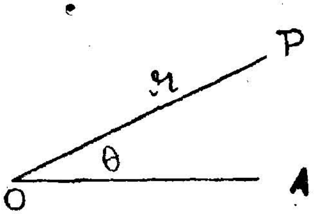
(3) $y = c \cosh {x/c}$.

(3) $x + a\cos\theta, y = b\sin\theta$ நீள்வட்டத்தில் $\frac{ds}{d\theta} = a$ $(1 - e^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}$ என்று நிறுவுக. இங்கு $b^2 = a^2\ (1 - e^2)$

(4) $x = a\ (\theta + \sin)\theta$, $y = a\ (1 - \cos\theta)$ யவளைவரையில் $\frac{ds}{d\theta} = 2a \cos\theta/2$, $\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{2a}{y}}$ என்று நிறுவுக.

III. போலார் துணை எண்கள் (Polar co-ordinates)

O நிலைப் புள்ளியிலிருந்து P-ன் தொலையான r-ம், O வழிச் செல்லும் OA என்ற நிலைக்கோட்டோடு கூடி OP பிறப்பிக்கும் கோணம் (θ-ம்) தெரியுமாயின், P புள்ளியின், நிலையைக் காணலாம்.



படம்-26

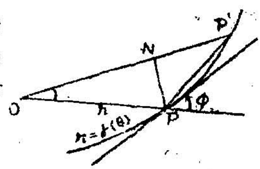
O போல் (pole) எனவும், OA தொடக்கக் கோடு (Initial line) எனவும், ஆரைத்தொலை (radius vector) எனவும், θ தொலைக்கோணம் (vectorial angle) எனவும், r, θ என்பவை P-ன் போலார் துணையெண்கள் (polar Co-ordinates) எனவும் கூறப்படும்.

O-லிருந்து அளக்கப்படும் r-ம், OA-லிருந்து இடமாக அளக்கப்படும் θ-ம் மிகையாகக் கருதப்படும்.

இம்முறையைக் கார்ட்டீசியன் (Cartesian) முறைக்கு மாற்ற Oஐ ஆதியாகவும், OAஐ x ஆயமாகவும் கொள்வது வழக்கம். அப்பொழுது $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

112. ஆரைத்தொலை, தொடுவரை இவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம்

$r = f(\theta)$ வளைவரையில் P, P^1 நெருங்கிய புள்ளிகள் எனவும், (r, θ), $(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$ அவற்றின் போலார் துணையெண்கள் எனவும் கொள்வோம்:



OP^1-க்குச் செங்குத்தாக PN ஐ வரைக. படம்-27

$$\text{அப்பொழுது, } PN = OP\sin PO^1N$$
$$= r\sin\delta\theta$$
$$P^1N = OP^1 - ON$$
$$= r + \delta r - r\cos\delta\theta$$
$$= \delta r + r(1 + \cos\delta\theta)$$
$$= \delta r + 2r\sin^2\frac{\delta\theta}{2}.$$

ஆரைத்தொலை OPQ-க்கும், தொடுவரைக்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தை ϕ என்று கொள்வோம்.

சுன்னத்தை $\delta\theta$ நெருங்கும் பொழுது (1) Pஐ P' நெருங்கும். (2) PP' கோடு P இடத்துத் தொடுவரையை முடிவாக அதனோடு இரண்டறக்கலக்கும். (3) கோணம் $PP'N$-ன் எல்லை ϕ ஆகும்.

$$\tan PP'N = \frac{PN}{P'N}$$

$$= \frac{r\sin\delta\theta}{\delta r + 2r\sin^2\dfrac{\delta\theta}{2}}$$

$$= r.\frac{\dfrac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}}{\dfrac{\delta r}{\delta\theta} + 2r.\dfrac{\sin^2\dfrac{\delta\theta}{2}}{\delta\theta}}$$

$$= r\frac{\dfrac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}}{\dfrac{\delta r}{\delta\theta} + r.\dfrac{\sin\dfrac{\delta\theta}{2}}{\dfrac{\delta\theta}{2}}\sin\dfrac{\delta\theta}{2}}$$

$$\underset{\delta\theta\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta} = 1,\quad \underset{\delta\theta\to 0}{\text{Lt}}\sin\frac{\delta\theta}{2} = 0\quad \underset{\delta\theta\to 0}{\text{Lt}}\frac{\delta r}{\delta\theta} = \frac{dr}{d\theta}.$$

$$\text{ஆகவே, } \tan\phi = \underset{\delta\theta\to 0}{\text{Lt}}\tan PP'N$$

$$= \frac{1}{\dfrac{dr}{d\theta} + r.0}$$

$$= r.\frac{1}{\dfrac{dr}{d\theta}}$$

$$= r.\frac{d\theta}{dr}$$

பயிற்சி 16.

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ வளைவரையை ஆரைத்தொலை எக்கோணத்தில் வெட்டும்?

ஆரைத் தொலைக்கும் தொடுவரைக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் ϕ என்று கொள்ளின்,

$$\tan\phi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$$

இருபுறத்து வகைக்கெழு எடுப்பின்,

$$-\frac{l}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -e\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = \frac{e r^2 \sin\theta}{l}$$

$$\therefore \tan\phi = \frac{r}{e r^2 \sin\theta} = \frac{l}{e r \sin\theta}$$

$$= \frac{1 + c\cos\theta}{e\sin\theta}$$

$$\therefore \phi = \tan^{-1}\left(\frac{1 + e\cos\theta}{e\sin\theta}\right).$$

பயிற்சி 17.

$r = a(1 - \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளையில் (cardioid) ஆரைத் தொலைக்கும் தொடுவரைக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் தொலைக் கோணத்தின் பாதி என்று நிறுவுக.

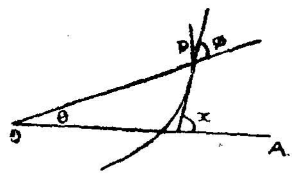
$$r = a(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\tan \phi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{a(1 - \cos\theta)}{a\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \phi = \frac{\theta}{2}$$

113. தொடுவரையின் சாய்வு



படம்_28

$O\,A$ தொடக்கக்கோடு, O போல் P-ன் துணையெண்கள் (r, θ), P இடத்துத் தொடுவரை $O\,A$ ஒடு கூடிப் பிறப்பிக்கும் கோணம் Ψ. இவ்வாறு கொள்ளின்,

$$\Psi = \phi + \theta$$

$$\therefore \tan\Psi = \tan(\phi + \theta)$$

$$= \frac{\tan\phi + \tan\theta}{1 - \tan\phi\tan\theta}$$

$\tan\phi$-ன் மதிப்பைக் கண்டு, பின் $\tan\Psi$-ன் மதிப்பையும் காண வளைவரையின் சமன்பாடு தெரிந்தாற்போதும்.

பயிற்சி 18.

$r = a(1 - \cos\theta)$ வளைவரையில் $\theta = \frac{\pi}{6}$ இடத்துத் தொடுவரையின் சாய்வு என்ன?

பயிற்சி 2-ல் $\phi = \frac{1}{2}\theta$ என்று நிறுவினோம்.

$$\text{ஆகவே,} \quad \Psi = \theta + \theta$$

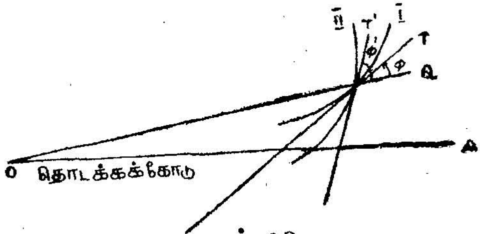
$$= \frac{3\theta}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ எனின், $\quad \Psi = 3\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ தொடுவரையின் சாய்வு $= \tan\Psi \tan\frac{\pi}{4} = 1$

114. இரு வளைவரைகள் வெட்டுங்கோணம்

கோணம் $T' \ PT =$ கோணம் QPT' — கோணம் QPT. இரு வளைவரைகள் வெட்டுங் கோணம் Ψ என்று கொள்ளின்,



படம். 29

$$x = \Psi' - \phi$$

$$\tan x = \tan (\phi' - \phi)$$

$$= \frac{\tan \phi - \tan \phi}{1 + \tan \phi \tan \phi}$$

வளைவரைகளின் சமன்பாடுகளால் P-ன் துணையெண்களைக் கண்டு $\tan \phi$, $\tan \phi'$ கணக்கிடலாம்.

பயிற்சி 29.

$r = a (1 + \cos \theta)$, r, b $(1 - \cos \theta)$ என்ற இவ்விரு வளை வரைகள் வெட்டுங் கோணத்தைக் காண்க.

இவ்விரு வளைவரைகள் வெட்டும் புள்ளி P என்றும், அவ்விடத்துத் தொடுவரைகள் முறையே PT, PT' என்றும் அவை OP ஒடு கூடிப்பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் முறையே, ϕ, ϕ' என்றும் கொள்வோமாயின்,

$$\tan \phi = r^2 \frac{d \ \theta}{dr}$$

$$= \frac{a (1 + \cos \theta)}{- a \sin \theta}$$

$$- \cos \theta/2$$

$$= \tan \frac{\pi}{2} + \theta/2$$

$$\therefore \phi = \frac{\pi}{2} + \theta/2.$$

இரண்டாவது வளைவரையில்

$$\tan \phi' = \frac{(1 - \cos \theta)}{b \sin \theta} = \tan \theta/2$$

$$\therefore = \theta/2$$

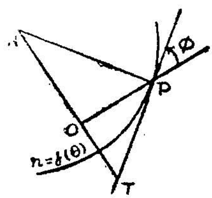
$$\text{ஆகவே, } \phi - \phi' = \frac{\pi}{2} + \theta/2 - \theta\ 2$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

ஆகவே, இவ்விரு வளைவரைகள் P-ல் செங்கோணத்தில் வெட்டும்.

115. கிளைத் தொடுவரை, கிளைச் செங்கோடு

PT, PN முறையே P இடத்துத் தொடுவரையும், செங்கோடும் ஆகும்.



படம் - 30

OP-க்கு வழியாகக் குத்துக்கோடு ஒன்று வரைக.

OT = போலர் கிளைத்தொடுவரை.

ON = போலர் கிளைச் செங்கோடு.

$$OT = OP \tan \phi$$

$$= r.\ r\ \frac{d\theta}{dr}$$

$$= r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

$$ON = OP \tan O\hat{P}N$$

$$= OP \tan (T\hat{P}N - T\hat{P}O)$$

$$= OP \tan (90 - \phi)$$

$$= r \cot \phi$$

$$= \frac{r}{r.\frac{d\theta}{dr}}$$

$$= \frac{dr}{d\theta}.$$

பயிற்சி 20.

$r = ae^{\theta \cot a}$ வளைவரையில் போலார் கிளைத் தொடுவரை $r \tan a$ என்றும், கிளைச் செங்கோடு $r \cot a$ என்றும் நிறுவுக.

$$\text{இங்கு } r = a e^{\theta \cot a}$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = a e^{\theta \cot a} \cot a$$

$$= r . \cot a$$

ஆகவே, போலர் கிளைச் செங்கோடு $= \cot a$

$$\text{மேலும்,} \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r \cot a}$$

$$\therefore \quad r^2 \quad \frac{a\theta}{dr} = \frac{r^2}{r \cot a}$$

$$= r \tan a$$

ஆகவே, போலர் கிளைத் தொடுவரை $= r \tan a$

பயிற்சி 21.

$r = a\theta$ வளைவரையில் போலர் கிளைத்தொடுவரை ஆரைத் தொலையின் இருபடிக்குத் தக வேறுபடும் என்றும், போலர் செங்கோடு மாறுதது என்றும் நிறுவுக.

$$r = a\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dr}{d\theta} = a$$

ஆகவே, போலார் கிளைச் செங்கோடு மாறுததாகும்.

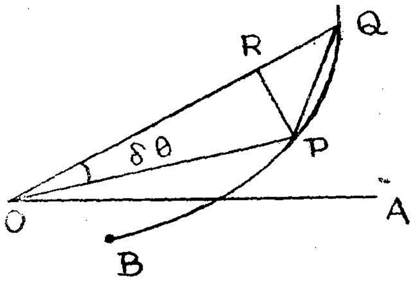
$$\text{மேலும்,} \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \quad r^2 \quad \frac{d\theta}{dr} = \frac{r^2}{a}.$$

ஆகவே, கிளைத் தொடுவரை $= r^2 \times \frac{1}{a}$

∴ அது r^2-க்குத் தக வேறுபடும்.

116. $r = f(\theta)$ **வளைவரையில் வில் நீளத்து வகைக்கெழு**



படம் - 31

வளைவரையில் P-ன் துணை யெண்கள் r, θ என்று கொண்டால்,

$$OP = r, \; \hat{AOP} = \theta.$$

P-க்கு அடுத்த Q-ன் துணையெண்கள் $r + \delta r, \; \theta + \delta\theta$ என்று கொண்டால், $OQ = r + \delta r, \; \hat{AOQ} = \theta + \delta\theta, \; \hat{POR} = \delta\theta$ வளைவரையில் B ஒரு நிலைப்புள்ளியாகும்.

வில் BP-ன் நீளம் s என்று கொண்டால்,

வில் BQ-ன் நீளம் $s + \delta s$.

ஆகவே, வில் $PQ = \delta s$

$$PR = OP \sin \delta\theta$$
$$= r \sin \delta\theta$$
$$OR = Op \cos \delta\theta$$
$$= r \cos \delta\theta.$$

மேலும், $RQ = OQ - OR$

$$= r + \delta r - r \cos \delta\theta$$
$$= \delta r + r(1 - \cos \delta\theta)$$
$$= \delta r + 2r \sin^2 \frac{\delta\theta}{2}.$$
$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$$
$$= (r \sin \delta\theta)^2 + \left(\delta r + 2r \sin^2 \frac{\delta\theta}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{\text{நாண் } PQ}{\delta\theta}\right)^2 = \left(r.\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}\right)^2 + \left[\frac{\delta r}{\delta\theta} + r.\frac{\sin^2\frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}}\right]^2$$

சுன்னத்தை $\delta\theta$ நெருங்குங்கால்,

$$\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta} \to 1,\ \frac{r\delta}{\delta\theta} \to \frac{dr}{d\theta},\ \frac{r\sin^2\frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}} = \frac{r\sin^2\frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}}\sin\frac{\delta\theta}{2} \to 0$$

$$\therefore \underset{\delta\theta\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{\text{நாண் } PQ}{\delta\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$\frac{\text{நாண் } PQ}{\delta\theta} = \frac{\text{நாண் } PQ}{\text{வில் } PQ}\ \frac{\text{வில் } pQ}{\delta\theta}$$

$$= \frac{\text{நாண் } PQ}{\text{வில் } PQ}\ \frac{\delta s}{\delta\theta}$$

சுன்னத்தை $\delta\theta$ நெருங்குங்கால்,

$$\frac{\text{நாண் } PQ}{\text{வில் } PQ} \to 1,\ \frac{\delta s}{\delta\theta} \to \frac{ds}{d\theta}.$$

$$\text{ஆகவே, } \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

இது போன்றே, $\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + \left(\frac{r\,d\theta}{dr}\right)^2$ என்று நிறுவலாம்.

பயிற்சி 22.

நெஞ்சுவளை $r = a\,(1 + \cos\theta)$-ல் $\frac{ds}{d\theta}$, $\frac{ds}{dr}$ காண்க.

$$r = a\,(1 + \cos\theta).$$

$$\therefore\ \frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$$

$$\therefore\ r\frac{d\theta}{dr} = \frac{a(1+\cos\theta)}{-a\sin\theta}$$

$$= -\cot\theta/2$$

ஆகவே, $\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2$

$$= 1 + \cot^2\theta/2$$

$$= \operatorname{cosec}^2\theta/2$$

$$\therefore\ \frac{ds}{dr} = \operatorname{cosec}\theta/2$$

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$= a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta$$

$$= a^2 + 2a^2\cos\theta + a^2\cos^2\theta = a^2\sin^2\theta$$

$$= 2a^2(1+\cos\theta)$$

$$= 4a^2\cos^2\theta/2$$

$$\therefore\ \frac{ds}{d\theta} = 2a\cos\theta/2.$$

பயிற்சிகள் 36.

(1) பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்கு நேராக உள்ள புள்ளிகளிடத்து வளைவரைகளின் சாய்வு என்ன?

(1) $r = a(1-\cos\theta)$ $\quad\theta = \frac{\pi}{2}$

(2) $r = a\sin 2\theta$ $\quad\theta = \frac{\pi}{4}$

(3) $r = e^{\theta}$ $\quad\theta = 0$

(4) $r = a\sin 3\theta$ $\quad$ போல்

(5) $r = a\theta$ $\quad\theta = \frac{\pi}{2}$

(2) வளைவரை $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ஐ ஆரைத்தொலை வெட்டுங் கோணம் என்ன?

(3) பரவளையங்கள் $r = a \sec^2 \theta/2$, $r = b \operatorname{cosec}^2 \theta/2$ செங் கோணத்தில் வெட்டும் என்று நிறுவுக.

(4) வளைவரைகள் $r = a\theta$, $r = \frac{a}{\theta}$ செங்கோணத்தில் வெட்டும் என்று நிறுவுக.

(5) செங்கோண அதிபரவளையங்கள் (rectangular hyperbolas) $r^2 \sin 2\theta = a^2$, $r^2 \cos 2\theta = b^2$ செங்கோணத்தில்வெட்டும் என்று நிறுவுக.

(6) வளைவரை $r \cos 2\theta = a$-ல் போலார் கிளைத் தொடுவரை $\frac{1}{2} a \operatorname{cosec} 2\theta$ என்றும், போலார் கிளைச் செங்கோடு $2a \sec 2\theta \tan 2\theta$ என்றும நிறுவுக.

(7) வளைவரை $r = a\theta$-ல் போலார் கிளைச்செங்கோடும், $r\theta = a$-ல் போலார் கிளைத்தொடுவரையும் மாறுதன என்று நிறுவுக.

(8) $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ நீள்வட்டத்தில் போலார் கிளைத் தொடுவரையின் நீளம் என்ன?

(9) கிளைத்தொடுவரை, கிளைச் செங்கோடு, தொடுவரை செங்கோடு முதலியவற்றை $r = a\theta$ வளைவரையில் காண்க.

(10) $r = a \sin 2\theta$, $r = a \cos 2\theta$ வளைவரைகள் வெட்டுங் கோணம் என்ன?

(11) $r = a \cos 2\theta$ல், $\theta = \frac{\pi}{6}$ இடத்துத் தொடுவரை போலிலிருந்து $\frac{a}{\sqrt{3}}$-க்கு அப்பால் தொடக்கக் கோட்டினை வெட்டும் என்று நிறுவுக.

(12) தொலைக்கோணம் $2a$ இடத்து $r = a (\cos + a)$-ன் தொடுவரை, மீண்டும் வளைவரையைத் தொலைக்கோணம் 2β-ல் வெட்டுமாயின்,

$$\cos (2\beta - a) + 2 \cos a = 0$$ என்று நிறுவுக.

(13) $r = a(1 - \cos\theta)$ வளைவரையில் $\frac{ds}{d\theta} = 2a \sin\frac{\theta}{2}$ என்றும், தொடுவரைக்குப் போலிலிருந்து வரையும் குத்துக் கோடு P என்று கொள்ளின், $P \propto (\sqrt{r})^3$ என்றும் நிறுவுக.

(14) $r = a\theta$ வளைவரையில் $\frac{ds}{dr} = \frac{\sqrt{r^2+a^2}}{a}$ என்று நிறுவுக.

(15) $r = \frac{a}{\theta}$-ல் $\frac{ds}{dr} = \frac{\sqrt{r^2+a^2}}{r}$ என்று நிறுவுக.

(16) பின்வரும் வளைவரைகளில் $\frac{ds}{d\theta}$ காண்க.

(1) $r = \log\sin 3\theta$.

(2) $r = \frac{1}{2}\sec^2\theta$.

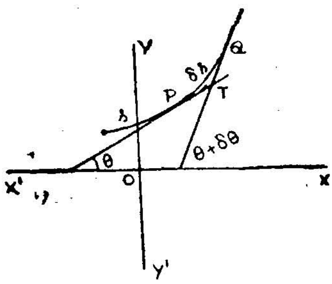
(17) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ வளைவரையில் $\frac{ds}{d\theta} = \frac{a^2}{r}$ என்று நிறுவுக.

(18) $r_n = a_n \cos n\theta$ வளைவரையில் $a^2 n \frac{d^2 r}{dr^2} + n.\ \frac{{}^2 n^{-1}}{r} = 0$ என்று நிறுவுக.

10. வளைவு

(Curvature)

117. வளைவரையில் நெருங்கிய புள்ளிகளாக P, Q இடத்துத் தொடுவரைகள் முறையே PT, QT என்றும், அவை நிலைக்கோடு ஒன்றுடன் கூடிப்பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் முறையே θ, $\theta + \delta\theta$ என்றும் கொண்டால், தொடுவரைகளான PT, QT ஆகியவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம் $\delta\theta$ ஆகும்.

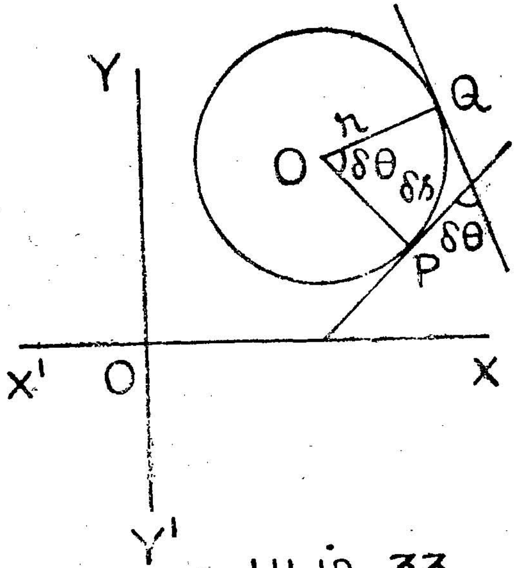


படம்-32

PQ வில்லின் நீளம் δs என்று கொண்டால், $\frac{\delta\theta}{\delta s}$ அதன் சராசரி வளைவு (average curvature) என்று சொல்லப்படும். P ஐ Q நெருங்கும் பொழுது (அஃதாவது சுன்னத்தை δs நெருங்கும் பொழுது) $\frac{\delta\theta}{\delta s}$-ன் எல்லை P இடத்து வளைவரையின் வளைவு (curvate of the curve at P) என வரையறுக்கப்படும்.

ஆகவே, P இடத்து வளைவரையின் வளைவு $= \frac{d\theta}{ds}$.

r ஆரையுடைய வட்டத்தின் வில்லாக PQ இருப்பின்,



படம்-33

$$\delta s = r\delta\theta$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta r} = \frac{1}{r}$$

ஆகவே, $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}$

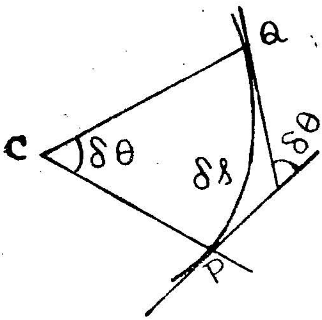
ஆதலின், வட்டத்தின் வளைவு எல்லாப் புள்ளிகளிடத்தும் நிலையாகும். மேலும், வட்டத்தின் ஆரை $r = \frac{1}{d\theta} = \frac{1}{\text{வளைவு}}$

வளைவரையில் ஒரு புள்ளி இடத்து $\frac{ds}{d\theta}$**-ன் மதிப்பு அவ்விடத்து வளைவரை கோட்ட ஆரை** (radius of curvature) **என்று கூறப்படும். அது வளைவின் தலைகீழ்ப் பின்னமாகும். கோட்ட ஆரைக்கு** *P* **என்பது குறியீடு.**

P இடத்துத் தொடுவரைக்கு எப்பக்கத்தில் வளைவரை உண்டோ, அப் பக்கத்தில் தொடுவரையைத் தொடுமாறு *P* ஆரையுடைய ஒரு வட்டம் வரையின், அது **கோட்ட வட்டம்** (circle of curvature) எனவும், அதன் மையம் **கோட்ட மையம்** (centre of curvature) எனவும் பெயர் பெறும்.

118. பிறிதொரு வழியாகவும் வளைவை வரையறுத்து அதன் மதிப்பைக் காணலாம்.

கோட்டமையம், நெருங்கிய இரு செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியெனக் கொள்வோம். அக்கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் $\delta\theta$ என்று கொள்ளின்,



பபடம்-34

$$\frac{CP}{\text{நாண் } PQ} = \frac{\sin CQP}{\sin PCQ}$$

$$\therefore \quad CP = \frac{\sin CQP \times PQ}{\sin \delta\theta}$$

$$= \sin \hat{CQP} \; \frac{PQ}{\text{வில்}PQ} \cdot \frac{\delta s}{\delta\theta} \cdot \frac{\delta\theta}{\sin \delta\theta}$$

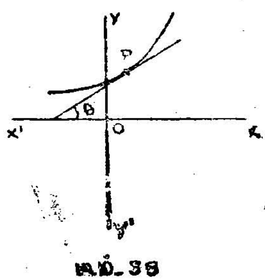
Pஐ Q நெருங்குங்கால் CQP-ன் எல்லை $90°$

$$\frac{PQ}{\text{வில் } PQ} \to 1, \; \frac{\delta s}{\delta\theta} \to \frac{ds}{d\theta}, \;\; \frac{\delta\theta}{\sin \delta\theta} \to 1$$

ஆகவே, முடிவில் $CP = \dfrac{ds}{d\theta} = P$.

119. கோட்ட ஆரைக்குக் கார்ட்டீசியன் வாய்பாடு

வளைவரைகளின் சமன்பாடுகள் x y ஆயத் தொலைகள் மூலம் கொடுக்கப் படுமெனில் $\dfrac{d\theta}{ds}$-ன் மதிப்பைக் காணுவது பெரும்பாலும் எளிதன்று. $\dfrac{dy}{dx} = \tan\theta$ என்று முன்னர்க் கண்டோம்.



படம்-35

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\tan\theta)$$

$$= \sec^2\theta . \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \sec^2\theta . \frac{d\theta}{ds} . \frac{ds}{dx}.$$

$$\therefore \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2} \div \left(\sec^2\theta . \frac{ds}{dx}\right)$$

$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$. இங்கு ρ கோட்ட ஆரை.

ஆகவே, $$\rho = \frac{\sec^2\theta . \frac{ds}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= \frac{(1 + \tan^2\theta)\frac{ds}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{ds}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

மேலும், $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ என்று முன் நிறுவப் பட்டது. ஆகவே, $\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$

பயிற்சி 1.

$x^4 + y^4 = 2$ வளைவரையில் (1, 1) இடத்துக் கோட்ட ஆரை என்ன?

$x^4 + y^4 = 2$

இரு புறங்களிலும் வகைக்கெழு எடுப்பின்,

$$4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{y^3}$$

இதன் வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx}}{y^6}$$

$$= \frac{3\left(x^3 \frac{dy}{dx} - x^3 y\right)}{y^4}$$

$$(1,\ 1)\text{-ல்}\ \frac{dy}{dx} = -1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -6$$

$$\therefore P = -\frac{(1+1)^{3/2}}{6}$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

பயிற்சி 3.

கயிற்று வளை (catenary) $y = c \cosh x/c$-ல் கோட்ட ஆரையின் நீளம் செங்கோட்டின் நீளம் ஆகும் என நிறுவுக.

$$y = c \cosh x/c.$$

$$= \frac{dy}{dx} = \sin h\ x/c$$

$$\text{ஆகவே,} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = (1 + \sin h^2\ x/c)^{3/2}$$

$$= (\cosh^2 x/c)^{3/2}$$

$$= \cosh^3 x/c.$$

$$\text{மேலும்,}\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c} \cosh x/c$$

$$\therefore P = \frac{\cosh^3 x/c}{{}^1/c\ \cosh x/c} = c \cosh^2 x/c$$

$$= c.\ \frac{y^2}{c^2} = \frac{y^2}{c}.$$

(x, y) இடத்துச் செங்கோட்டின்

$$\text{நீளம்} = \left\{ y^2 + \left(y \frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$= y \cosh x/c$$
$$= \frac{y^2}{c}$$

பயிற்சி 4.

ஒரு வளைவரையில் சமன்பாடுகள் $x = f(\theta),\ y = \phi(\theta)$ என்றிருப்பின், $\frac{1}{P} = \frac{x' y'' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$ என்று நிறுவுக.

இங்கு $x' = \frac{dx}{d\theta},\quad x'' = \frac{d^2x}{d\theta^2}, \ldots\ldots$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta} = \frac{y'}{x'}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{y'' x' - y' x'}{x'^2} \cdot \frac{1}{x'}$$

$$= \frac{y'' x' - y' x''}{x'^3}$$

$$\therefore \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \div \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$$

$$= \frac{y'' x' - y' x''}{x'^3} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{y'^2}{x'^2}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{y'' y' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

பயிற்சி 5.

உருள்வளை (cycloid) $x = a(\theta + \sin\theta)\, y = a(1 \cos\theta)$-ன் கோட்ட ஆரை $4a \cos \theta^1/_2$ என்று நிறுவுக.

$$x = a(\theta + \sin\theta) \quad \therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta);\ \frac{d^2x}{d\theta^2} = -a\sin\theta$$

$$y = a(\theta - \cos\theta) \quad \therefore \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = a\cos\theta.$$

இம் மதிப்புகள் முந்திய பயிற்சியிலுள்ள வாய்பாட்டில் வருவனவற்றிற்குப் பதிலாக்கின்,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a(1 + \cos\theta)\, a\cos\theta - a\sin\theta\,(-a\sin\theta)}{[a^2(1 + \cos\theta)^2 = a^2\sin^2\theta]^{3}/^{2}}$$

$$= \frac{a^2 (\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta)}{a^3 (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta \ \sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{a^2 (1 + \cos\theta)}{a^3 (2 + 2\cos\theta)^{3/2}}$$

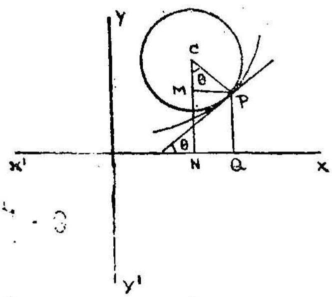
$$= \frac{2a^2 \cos^2 \theta/2}{a^3 (4\cos^2 \theta/2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4a \cos \theta/2}$$

$$\rho = 4a \cos \theta/2.$$

120. கோட்ட மையத்தின் ஆயத்தொலைகள்

p-க்கு உரிய கோட்ட மையம் C எனவும், P, C புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே (x, y), (ξ, η) எனவும் கொள்வோம்.



படம்-36

$$\xi = ON = OQ - MP$$
$$= x - PC \sin\theta$$
$$= x - P\theta$$
$$\eta = NC = QP + MC$$
$$= y + \rho C \sin\theta$$
$$= y + \rho \cos\theta$$

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\sin\theta = \theta, \cos\theta = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\text{ஆகவே; } \xi = x - \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\eta = y + \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

கோட்ட மையத்தின் இயங்குவரை (locus) வளைவரையின் பிறப்பு வளை (evalute) எனப் பெயர் பெறும்.

பயிற்சி 6.

செங்கோண அதிபர வளையம் $xy = 2$-ல் $(2, 1)$-க்கு உரிய கோட்ட மையத்தின் ஆயத்தொலைகளைக் காண்க.

$$\text{இங்கு } y = \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{x^2}$$

$$\therefore (2, 1)\text{-ல் } \frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \xi = 2 + \frac{(1+\frac{1}{4})\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 3\tfrac{1}{4}$$

$$\eta = 1 + \frac{1+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 3\tfrac{1}{2}.$$

ஆகவே, கோட்ட மையம் $(3\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2})$.

பயிற்சி 7.

பரவளையம் $y^2 = 4ax$ல் 't' இடத்து $\rho = -2a(1+t^2)^{\frac{3}{2}}$, $\xi = 2a + 3at^2$, $\eta = -2at^3$ என்று நிறுவிப் பின்னர் அதன் பிறப்பு வளையைக் காண்க.

$$x = at^2, y = 2\,at$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\,at, \quad \frac{dy}{dt} = 2\,a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} \quad \frac{dt}{dx}$$

$$= -\frac{1}{t^2 \times 2\,at} = -\frac{1}{2\,at^3}$$

$$= \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2} \times \frac{d_2y}{dx^2}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{3/2} \div -\frac{1}{2\,at^3}$$

$$= -2\,a\,(1 + t^2)^{3/2}$$

$$E = x - \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} \quad \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = at^2 - \frac{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t}}{\frac{1}{2\,at^3}}$$

$$= 2\,a + 3\,at^2.$$

$$\eta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 2\,at + \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{-\frac{1}{2\,at^2}}$$

$$= -2\,at^3$$

$\xi = 2\,a + 3\,at^2$, $\eta = -2\,at^3$ என்ற சமன்பாடுகளில் 1ஐ அகற்றினுல், ξ, η கொண்டிட ஒரு சமன்பாடு வரும். அச் சமன் பாட்டில் ξ, ηக்கு முறையே x, y என்பவற்றை ஈடாக்கின் (ξ, η)-ன் இயங்குவரை வரும்.

$$t = \left(\frac{\xi - 2a}{3a}\right)^{1/2}$$

$$\therefore \eta = -2\,a\left(\frac{\xi - 2a}{3a}\right)^{3/2}$$

இரு புறங்களுக்கும் இருபடி காணின்,

$$\eta^2 = -4\,a^2\,\frac{(\xi - 2a)^3}{27\,a^3}$$

(அ-து.) $27\,a\,\eta^2 = 4\,(\xi - 2\,a)^3$

ஆகவே, பிறப்பு வளை $27\,ay^2 = 4\,(x - 2\,a)^3$

பயிற்சி 8.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^4} = 1$-ல் $(a \cos \theta, b \sin \theta)$

இடத்து $\rho = -\frac{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}{ab}$ என்று நிறுவி

அதன் பிறப்பு வளையையும் காண்க.

$$x = a \cos \theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta.$$

$$y = b \sin \theta \quad \frac{dy}{d\theta} \; b \cos \theta.$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{b}{a} \cot \theta\right)$$

$$= \frac{b}{a} \operatorname{cosec}^2 \theta . \frac{d\theta}{dx}.$$

$$= -\frac{b}{a^2} \operatorname{cosec}^3 \theta.$$

$$\rho = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2} \div \frac{d^2 y}{d x^2}$$

$$= \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \cot^2 \theta\right)^{3/2} \div -\frac{b}{a^2} \operatorname{cosec}^3 \theta.$$

$$= -\frac{(a^2 \sin^3 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}{a^3 \sin_3 \theta . \frac{b}{a} \operatorname{cosec}^3 \theta}$$

$$= -\frac{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}{ab}$$

$$\xi = x - \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2 y}{d x^2}}$$

$$= a \cos \theta - \frac{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \cot^2 \theta\right) \frac{b}{a} \cot \theta.}{\frac{b}{a^2} \operatorname{cosec}^3 \theta}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2) \cos^3 \theta.}{a}$$

$$\eta = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{d x^2}} = b \sin \theta - \frac{1 + \frac{b^2}{a^2} \cot^2 \theta}{\frac{b}{a^2} \operatorname{cosec}^3 \theta}$$

$$= - \frac{(a^2 - b^2)}{b} \sin^3 \theta.$$

$$\xi = \frac{(a^2 - b^2) \cos^3 \theta}{a}, \quad \eta = - \frac{(a^2 - b^2) \sin^3 \theta}{b}$$

இச் சமன்பாடுகளில் θஐ அகற்றுக.

$$\cos \theta = \left(\frac{a \xi}{(a^2 - b^2)}\right)^{\frac{1}{3}}; \sin \theta = \left(\frac{- b \eta}{(a^2 - b^2)}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \left(\frac{a \xi}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{- b \eta}{(a^2 - b^2)}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

அஃதாவது $(a \xi)^{\frac{2}{3}} = (b \eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$

ஆகவே, பிறப்புவளை $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.

பயிற்சி 9.

உருள்வளை $x = a (\theta - \sin \theta)$, $y = a (1 - \cos \theta)$-ன் பிறப்புவளை பிறிதோர் உருள்வரை என நிறுவுக.

$$\frac{dx}{d \theta} = a (1 - \cos \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin \theta}{a (1 - \cos \theta)} = \cot \theta/$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (\cot \theta/2) = - \operatorname{cosec}^2 \theta/^2 . \tfrac{1}{2} . \frac{d\theta}{dx}$$

$$= - \frac{\operatorname{cosec}^2 \theta/2}{2a (1 - \cos \theta)}$$

$$= \frac{1}{4a \sin^4 \theta/2}$$

$$\xi = x + \frac{(1 + \cot^2 \theta/2) \cot \theta/2}{\frac{1}{4a \sin^4 \theta/2}}$$

$$= a (\theta - \sin \theta) + a \sin \theta$$

$$= a (\theta + \sin \theta)$$

$$\eta = y \pm \frac{1+\cot^2 \theta/}{\frac{1}{4a \sin^4 \theta/^8}} = a\,(1 \quad \cos\theta)\, 2a\,(1-\cos\theta)$$

$= -\,a\,(1-\cos\theta).$

$\therefore\ \xi = a\,(\theta + \sin\theta),\ \eta = -\,a\,(1 \ \cos\theta)$

ஆகவே, $(\xi - 1)$-ன் இயங்குவரையின் சமன்பாடுகள்.

$x - a\,(\theta + \sin\theta),\ - = -\,a\,(1-\cos\theta)$

இஃது ஓர் உருள் வளையாகும்.

பயிற்சிகள் 37.

பின்வருவனவற்றிற்குக் கோட்ட ஆரை காண்க.

1. வளைவரை $y = x^3$ $(1, 1)$ இடத்து

2. வளைவரை $y = \sin x$-ல் $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ இடத்து.

3. வட்டம் $x^2 + y^2 = 169$-ல் $(12, \ )$ இடத்து.

4. $2y = x - x^2 + x^3$-ல் $(1, \frac{1}{2})$ இடத்து.

5. $y = e^x$ வளைவரை y ஆயத்தைக் கடக்கும் இடத்து.

6. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$-ல் $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ இடத்து.

7. நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ல் $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right), \ \frac{b}{\sqrt{2}}$ இடத்து.

8. $x^3 + y^3 = 3axy$ வளைவரையில் $\frac{3a}{2}, \ \frac{a}{2}$. இடத்து.

9. $y = 4\sin x - \sin 2x$ வளைவரையில் $x = \frac{\pi}{2}$. என்று இருக்கும் இடத்து.

10. செங்கோண அதிபர வளையம் $x^2 - y^2 = a^2$-ல் (x, y) இடத்து

11. $y = c \cosh {}^x/c$ கயிற்று வளையில் (o, c) இடத்து.

12. $y\,(x^2 + y^2) = 2\,(y^2 - x^2)$ வளைவரையில் $(0, 2)$ இடத்து

13. $xy^2 = 16\,(x + 4)$ வளைவரையில் $(-4, 0)$ இடத்து.

14. $y^2 = x\,(x-3)^2$ வளைவரையில் ஆதியிடத்து.

15. $y = a \log \sin \frac{x}{2}$ வளைவரையில் (x, y) இடத்து.

16. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ வளைவரையில் $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ இடத்துக் கோட்ட ஆரை $3a\sin\theta\cos\theta$ என்று நிறுவுக.

17. ஒரு நீள் வட்டத்தில் CP, CD என்பவை துணையிய அரைவிட்டங்கள் (conjugate semi diameters) ஆயின், P இடத்துக் கோட்ட ஆரை $\frac{CD^3}{ab}$ என்று நிறுவுக. இங்கு a, b என்பவை நீள் வட்டத்தின் அரை அச்சுகளாகும் (semi axes).

18. ஒரு வளைவரையில் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்

$$x = c\sin 2\theta(1+\cos 2\theta)$$

$y = c\cos 2\theta(1-\cos 2\theta)$ எனின், அப் புள்ளி இடத்துக்கோட்ட ஆரை $4c\cos 3\theta$ என்று நிறுவுக.

19. $x = 3a\cos\theta - a\cos 3\theta$, $y = 3a\sin\theta - a\sin 3\theta$ வளைவரையில் 'θ' இடத்துக் கோட்ட ஆரை $3a\sin\theta$ என்று நிறுவுக.

20. செங்கோண அதிபர வளையம் $xy=c^2$ல் P இடத்துக் கோட்ட ஆரை $\frac{r^3}{2\theta^2}$ என்று நிறுவுக. இங்கு ஆதியிலிருந்து P-ல் தொலை r ஆகும்.

21. உருள்வளை $x = a(\theta-\sin\theta)$, $y\ a(1+\cos\theta)$ல் P இடத்துக் கோட்ட ஆரை செங்கோட்டின் இரு மடங்கு நீளமுடையது என்று நிறுவுக.

22. $y = ax^2+bx+c$ வளைவரை $(0, 0)$ $(1, 1)$, $(-1, -\frac{1}{2})$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லுங்கால் a, b, c-ன் மதிப்பினையும், $(c, 0)$ இடத்துக் கோட்ட ஆரையையும் காண்க.

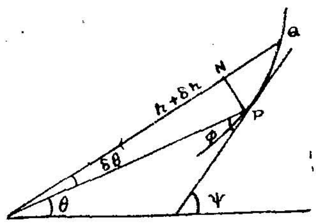
23. $x = a(\log\cot\theta/2-\cos\theta)$; $y = a\sin\theta$ வளைவரையில் (x, y) இடத்துக் கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

24. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ வளைவரையில் $\xi = a\cos^3 t + 3a\cos t.\sin^2 t$, $\xi + a\sin^3 t + 3a\sin t\cos^2 t$ என்றும், அதன் பிறப்புவளை $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$ என்றும் நிறுவுக.

25. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபர வளையத்தில் பிறப்புவளை

$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$ என்றும் நிறுவுக.

121. கோட்ட ஆரைக்குப் போலார் வாய்பாடு



படம்-37

வளைவரையின் சமன்பாடு $r = f(\theta)$ என்று இருப்பின், பின் வருமாறு P கணக்கிடப்படும்.

படத்தில் $\Psi = \theta + \phi$ என்று காணலாம்.

$$\therefore \frac{d\Psi}{d\theta} = 1 + \frac{d\phi}{d\theta}$$

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$$ என்று நிறுவினோம்.

ஆகவே, $\phi = \tan^{-1}\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)$

இருபுறங்களிலும் வகைக்கெழு காண ன்

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}} \cdot \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r.\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r.\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r.}$$

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = 1 + \frac{d\phi}{d\theta}.$$

$$= 1 + \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r.\ \frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}$$

$$= \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\ \frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$\frac{ds}{d\theta} = \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ என்று முன் நிறுவினோம்.

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\Psi}$$

$$= \frac{ds}{d\theta} \div \frac{d\Psi}{d\theta}$$

$$= \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{r^2 + 2.\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r.\ \frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

$$= \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]}{r + 2.\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r.\ \frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

பயிற்சி 10.

$r = a(1 - \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையின் கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

இங்கு, $\frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta,\quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = a\cos\theta.$

ஆகவே, $\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] = \left[a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right]$

$$= 8a^3\sin^3\theta/2$$

$$r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} = a^2(1 - \cos\theta)^2 + 2a^2\sin^2\theta$$
$$- a^2\cos\theta(1 - \cos\theta)$$

$$6\, a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

ஆகவே, $\rho = \dfrac{8a^2 \sin^3 \theta/2}{6a^2 \sin^2 \theta/2} = \dfrac{4}{3}\, a \sin \theta/2$

$$= \tfrac{2}{3} \sqrt{2ar}$$

பயிற்சி 11.

$r^n = a^n \cos n\,\theta$ வளைவரைக்குக் கோட்ட ஆரை $\dfrac{a^n\, r^{-n+1}}{n+1}$ என்று நிறுவுக.

சமன்பாட்டில் மடக்கை எடுத்துப் பின்னர் வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{n}{r}\ \frac{dr}{d\theta} = -\frac{n \sin n\,\theta}{\cos n\,\theta}$$

ஆகவே, $\dfrac{dr}{d\theta} = -\, r \tan n\,\theta$

$$\therefore\ \frac{d^2 r}{d\theta^2} = -\frac{dr}{d\theta}.\ \tan n\,\theta - nr \sec^2 n\theta$$

$$= r \tan^2 n\theta - nr \sec^2 n\theta$$

ஆகவே, $\rho = \dfrac{(r^2 + r^2 \tan^2 n\theta)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r^2 \tan^2 n\theta - r^2 \tan^2 n\theta + nr^2 \sec^2 n\,\theta}$

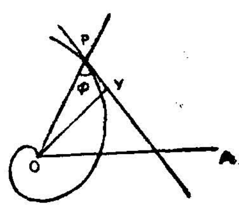
$$= \frac{r^3 \sec^3 n\theta}{(n+1)\ r^2 \sec^2 n\theta}$$

$$= \frac{r}{(n+1)\ \cos n\,\theta}$$

$$= \frac{r\, a^n}{(n+1)\, r^n} = \frac{a^n\, r^{-n+1}}{n+1}$$

122. வளைவரைகளின் $p-r$ சமன்பாடு.

OA ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும், *O* ஐப் போலாகவும், *P*ஐ வளைவரையில் ஒரு புள்ளி ஆகவும் கொள்வோம்.



படம் - 38

போலிலிருந்து P இடத்துத் தொடுவரைக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் OYஐ, p என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$$OY = p = r \sin \phi$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p^2} = \frac{2}{r^2 \sin^2 \phi}$$

$$= \frac{1}{r^2}(1 + \cot^2 \phi)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left\{1 + \left(\frac{1}{r} + \frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$r = \dfrac{1}{u}$ என்று கொள்ளின், $\dfrac{dr}{d\theta} = -\dfrac{1}{u^2}\,\dfrac{du}{d\theta}$.

$$\therefore \frac{1}{p^2} = u^2 + u^4 \left(-\frac{1}{u^2}\,\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

$$= u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2.$$

பயிற்சி 12.

$r = a(1 - \cos\theta)$ வளைவரையில் $p^2 = \dfrac{r^3}{2a}$ என்று நிறுவுக.

$r = a(1 - \cos\theta) \qquad \therefore \quad \dfrac{dr}{d\theta} \sin p\,\theta$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}. \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}.\ a^2 \sin^2\theta$$

$$= \frac{r^2 + a^2 \sin^2\theta}{r^4}$$

$$= \frac{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta.}{r^4}$$

$$= \frac{2a^2 - 2a^2\cos\theta}{r^4}$$

$$= \frac{2a^2\ (1-\cos\theta)}{r^4}$$

$$= \frac{2ar}{r^4}$$

$$= \frac{2a}{r^2}.$$

$$\therefore p^2 = \frac{r^3}{2a}$$

பயிற்சி **13.**

பரவளையத்தின் போலார் சமன்பாட்டினால் $p^2 = ar$ என்று நிறுவுக.

பரவளையத்தின் போலார் சமன்பாடு $\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$ இரு புறத்தும் θஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு காணின்,

$$-\frac{2a}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta} = \sin\theta.$$

$$\therefore \frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\sin\theta}{2a}.$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{\sin^2\theta}{4a^2}.$$

$$= \left(\frac{1-\cos\theta}{2a}\right)^2 + \frac{\sin^2\theta}{4a^2}$$

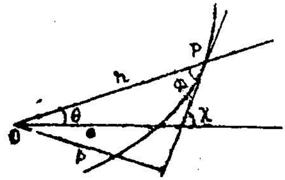
$$= \frac{-2\cos\theta}{4a^2}$$

$$= \frac{2a}{r}\cdot\frac{2}{4a^2}$$

$$= \frac{1}{ar}$$

$$\therefore p^2 = ar.$$

123. பல வளை வரைகளில் போலிலிருந்து தொடுவரைக்கு வரையும் குத்துக்கோட்டின் நீளமும், ஆரைத் தொலையும், தம்முள் மிக எளிய தொடர்புடையனவாக இருக்கின்றன, இத் தொடர்பு வளைவரையின் p, r சமன்பாடு எனப்படும். முன் செய்த பயிற்சிகளின்படி பரவளையத்தின் p, r சமன்பாடு $p^2 = ar$, நெஞ்சுவளையின் p, r சமன்பாடு $p^2 = \frac{r^3}{2a}$.



படம்-39

124. கோட்ட ஆரையின் போலார் வாய்பாட்டால் சில வளைவரைகளின் கோட்ட ஆரைக் காண்பது எளிதன்று. ஆதலின், அவ் வளைவரைகளுக்குப் பின் வரும் வாய்பாட்டினைப் பயன்படுத்தலாம்.

$\sin\phi = r\dfrac{d\theta}{ds}$, $\cos\phi = \dfrac{dr}{ds}$, $\tan\phi = r\dfrac{d\theta}{dr}$ என்று முன் நிறுவப்பட்டது.

$$p = r\sin\phi$$

$$\frac{dp}{dr} = \sin\phi + r\cos\phi\frac{d\phi}{dr}.$$

$$= r\frac{d\theta}{ds} + r\frac{dr}{ds}\cdot\frac{d\theta}{dr}$$

$$= r\frac{d\theta}{ds} + r\frac{d\phi}{ds}.$$

$$\Psi = \theta + \phi$$

$$\therefore \frac{d\Psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds}$$

$$\therefore \frac{dp}{dr} = r\frac{d\Psi}{ds}$$

$$\therefore \frac{ds}{d\Psi} = r\frac{dr}{dp}$$

ஆகவே, $\rho = r\dfrac{dr}{dp}$

பயிற்சி 14.

$r = a(1 - \cos\theta)$ நெஞ்சுவளையின் கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

நெஞ்சுவளையின் $p-r$ சமன்பாடு $2p^2a—r^3$. இருபுறத்தும் வகைக்கெழு காணின்,

$$4pa = 3r^2\frac{dr}{dp}$$

$$\therefore r \frac{dr}{dp} = \frac{4pa}{3r}$$

$$\therefore \rho = \frac{4a}{3r}\left(\frac{r^3}{2a}\right)^{1/2}$$

$$= \tfrac{1}{3}(2ar)^{1/2}$$

பயிற்சி 15.

$r^2 = a^2 \sin 2\theta$ வளைவரையின் கோட்ட ஆரை என்ன?

இவ்வளைவரையின் $p = r$ சமன்பாடு $pa^2 = r^3$

இரு புறத்தும் வகைக்கெழு காணின் $a^2 = 3r^2 \dfrac{dr}{dp}$

$$\therefore \rho = r \frac{dr}{dp} = \frac{a^2}{3r}.$$

பயிற்சிகள் 38.

1. பின்வரும் வளைவரைகளுக்குக் கோட்ட ஆரை காண்க:

(1) செங்கோண அதிபர வளையம் $r^2 = a^2 \sec 2\theta$.

(2) கூம்பு வெட்டு $\dfrac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

(3) பரவளையம் $r\cos^2\theta/2 = a$.

(4) வளைவரை $r = a\theta$.

(5) $r = ke^{\theta\cot\alpha}$ இங்கு k, α என்பவை நிலைத்த இராசிகளாகும்.

2. $r^2 = a^2\cos 2\theta$ வளைவரையில் கோட்ட ஆரை $\dfrac{a^2}{3r}$ என்று நிறுவுக.

3. $r^n = a^n \sin n\theta$ வளைவரையில் (r, θ) இடத்துக் கோட்ட ஆரையைக் காண்க.

4. $r = a(1 + \cos\theta)$ வளைவரையில் $\dfrac{\rho^2}{r}$ மாறு இராசி என்று நிறுவுக.

5. $r = a\theta$, $r\theta = a$ வளைவரைகள் வெட்டும் இடத்து அவற்றின் வளைவு $3:1$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளன என்று நிறுவுக.

6. $r = a\sec 2\theta$ வளைவரையில் $\rho = -\dfrac{r^4}{3p^3}$ என்று நிறுவுக.

இங்குப் போலிலிருந்து (r, θ) இடத்துத் தொடுவரையின் தொலை ρ ஆகும்.

7. $r = a \sin n\theta$ வளைவரைக்குப் போலிடத்துக் கோட்ட ஆரை $\cdot \dfrac{na}{2}$ என்று நிறுவுக.

8. $r^m \quad a^m \cos m$ வளைவரையில் $\rho = \dfrac{a^m}{(m+1)\, r^{m-1}}$. என்று நிறுவுக. இதனைப் பயன்படுத்திச் செங்கோண அதிபர வளையம், பர வளையம், நெஞ்சுவளை, வட்டம் ஆகிய வற்றின் கோட்ட ஆரைகளைக் காண்க.

9. பின்வரும் வளைவரைகளில் $p - r$ சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(1) $r \sin \theta + a = 0$

(2) $r = \dfrac{a}{2}(1 - \cos \theta)$

(3) $r = a \sin \theta$

(4) $r^2 = a^2 \sin 2\theta$

(5) $r^2 \sin 2\theta + a^2 = 0.$

(6) $r^m = a^m \sin m0.$

(7) $r = a \dfrac{\theta^2}{\theta^2 - 1}$

(8) $r = a e^{\theta \cot \alpha}$

11. வளைவரை வரைதல்

(Tracing of Curves)

125. $f(x)$ என்ற சார்பின் வளைவரை வரைய மேற்கொள்ளும் முறை பின்வருமாறு :

x-க்குப் பல மதிப்புகள் கொடுத்து (எடுத்துக்காட்டாக $0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$) அவற்றிற்கு எதிர் நிலையான y-ன் மதிப்புகளைக் கணக்கிடின், சார்பின் கோட்டுப் படத்தில் உள்ள பல புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளைக் காணலாம். அத் தொலைகளால் புள்ளிகளின் நிலையைப் பொறித்து அப் புள்ளிகளை ஒரு வளைவரையால் சேர்ப்பின், சார்பின் வளைவரை வரும். இம் முறைப்படி பிழையற்ற வளைவரை வரைவதற்குக் கோட்டுப் படத்திலுள்ள அப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் கணக்கிடல் வேண்டும். இம் முறை கடினமானது. அதனால் இம் முறை நடைமுறையில் மேற்கொள்ளப் படுவதில்லை. வளைவரைகளின் சமன்பாடுகளை ஆராய்ந்தால் அவற்றின் பண்புகளை அறியலாம். அவை யாவை? பண்புகளைப் பயன்படுத்திப் பல புள்ளிகள் பொறிக்காமலே வளைவரையின் வடிவத்தை ஓரளவு காணும் முறை எது? என்பதை இனிப் பார்ப்போம்.

126. சமன்பாட்டினால், வளைவரை வரையப் பின்வருவது போன்ற முறை ஒன்றை மேற்கொள்ளுவது நலம்.

(1) வளைவரை சமச்சீர் (Symmetry) உடையதா என்று சமன்பாட்டினால் எளிதிற் காணலாம்.

(a) சமன்பாட்டில் y அடங்கிய உறுப்புகளில் y-ன் இரட்டிய படிகள் மட்டுமே இருப்பின், வளைவரை x ஆயத்தோடு சமச்சீர் உடையதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $y^2 - 4ax$; $xy^2 = 4x^2(2a - x)$;
$y^2(2a - x) = x^3$.

x அடங்கிய உறுப்புகளில் x-ன் இரட்டிய படிகள் மட்டுமே இருப்பின், அது y ஆயத்தோடு சமச்சீர் உடையதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $x^4 = a^2 (x^2 - y)$; $x^2 = y^2 . \dfrac{y+a}{x-a}$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற சமன்பாடு போன்று எல்லா உறுப்புகளிலும் x, y என்பவற்றின் இரட்டிய படிகள் அடங்கி இருப்பின் இரு ஆயத்தோடும் சமச்சீர் உடையதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = a^2 b^2$

$x^2 y^2 = a^2 (x^2 - y^2)$

(b) x, y என்பவற்றின் குறியை மாற்றிய பின்னரும் சமன்பாட்டில் குறிமாற்றம் இல்லை எனின், எதிரான கால்வட்டங்களில் (opposite quadrants) வளைவரை சமச்சீர் உடையதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $xy = c^2$; $x^4 = a^2 (x^2 - y^2)$;

$x^3 + y^3 = a^2 x.$

(c) x, y என்பவை தம்முள் மாறி எழுதிய பின்னரும் சமன்பாட்டில் மாறுதல் இல்லையெனின், $y = x$ என்ற கோட்டோடு வளைவரை சமச்சீர் உடையதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $xy = c^2$, $x^3 + y^3 = 3\,axy$.

(2) வளைவரையில் சில சிறப்புப் புள்ளிகள்

(a) முதலாவதாக, வளைவரை ஆயங்களைக் கடக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க. வளைவரை x ஆயத்தைக் கடக்கும் இடங்கள் காணச் சமன்பாட்டில் y-க்குச் சுன்னத்தைப் பதிலாக்கியபின் வரும் xஅடங்கிய சமன்பாட்டை விடுவித்தல் வேண்டும். இது போன்றே, வளைவரை y ஆயத்தைக் கடக்கும்ஆயத்தொலைகளையும் காணலாம்.

(b) சமன்பாட்டில் x அல்லது y அடங்கிய உறுப்புகள் மட்டுமே இருப்பின், வளைவரை ஆதிவழியாகச் செல்லும். ஏனெனின், ஆயத்தொலைகளான $(0, 0)$ சமன்பாட்டோடு இணங்குகின்றன.

(c) x-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு y-ன் மதிப்பு கற்பனையாகும் என்று காண்க. இம் மதிப்புகள் α, β என்று கொள்ளின், $x = \alpha$, $x = \beta$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையில் வளைவரை வராது. இதுபோன்றே y-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு x-ன்

மதிப்புக் கற்பனையாகும் என்று காண்க. அவை γ, δ எனின், $y=\gamma, y=\delta$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையில் வளைவரை வராது.

(d) x-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு y-ன் மதிப்பும், y-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு x-ன் மதிப்பும் எண்ணிலியாகும் என்று காண்க. இம் மதிப்புகளால் ஆயங்களுக்கு ஒரு போகுக் கோடுகளாகும். வளைவரைகளின் நெடு நிலைக்குத்துத் தொடுவரை (Asymptotes) அறியலாம்.

(e) x, y என்பவை அடங்கிய உட்படு சார்பு கொடுத்திருப்பின், சமன்பாட்டை விடுவித்து, $y=f(x)$ என்று எழுதுவது நலம்.

எடுத்துக்காட்டாக $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$-ல் இருந்து $x^2=\dfrac{y}{1-y}$ வரும். $y=1$ எனின், x-ன் மதிப்பு எண்ணிலியாகும். ஆகவே, வளைவரைக்கு $y=1$ நெடுநிலைக்குத்துத் தொடுவரை ஆகும்.

x-ன் மதிப்பு எண்ணிலியை நெருங்கும்பொழுது y-ன் எல்லையைக் காண்க. எடுத்துக்காட்டாக $x=\dfrac{x^2}{1+x^2}$-ல் y-ன் எல்லை 1. ஆகவே, $y=1$ நெடுநிலைக்குத்துத் தொடுவரை.

x-ன் மதிப்பு எண்ணிலியை நெருங்கும்பொழுது $ax+b$, என்பது போன்ற கோவை y-ன் எல்லையாக இருப்பின் $y=ax+b$ நெடுநிலைக்குத்துத் தொடுவரையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $y=\frac{1}{2}x+3+\dfrac{1}{x}$-ல் எண்ணிலியை x நெருங்கும்பொழுது y-ன் எல்லை $\frac{1}{2}x+3$. ஆகவே, $y=\frac{1}{2}x+3$ நெடுநிலைக்குத்துத் தொடுவரையாகும்.

(3) (a) சார்பின் சமன்பாட்டினுல் $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க. வளைவரையில் தெரிந்த புள்ளிகளில் $\dfrac{dy}{dx}$-ன் மதிப்புகளைக் காணின், அப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகளின் சாய்வு வீதத்தைக் (gradient) காணலாம்.

(b) $\dfrac{dy}{dx}=0$-ன் தீர்வுகள் கண்டு வளைவரை, மீப்பெரு

மீச்சிறு மதிப்புகளை அடையும் புள்ளிகள் எவை என்றும், அம் மதிப்புகள் எவை என்றும் காண்க.

(c) உருமாறும் புள்ளிகள் (points of inflexion) வளைவரையில் உளவா என்று ஆராய்க.

பயிற்சி 1.

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$ சமன்பாட்டின் வளைவரையை வரைக.

(1) சமச்சீர் x அடங்கிய உறுப்புகளில் x-ன் இரட்டிய படிகள் மட்டுமே இருப்பதால் வளைவரை yஆயத்தோடு சமச்சீர் உடையதாகும். வேறு ஒரு சமச்சீர் காண்பதற்கில்லை.

(2) சிறப்புப் புள்ளிகள். சமன்பாட்டில் x-க்குச் சுன்ன மதிப்புக் கொடுப்பின் $y = -1$.

$y = 0$ எனின் x-க்குக் கற்பனை மதிப்பேவரும். ஆகவே, வளைவரை x ஆயத்தை வெட்டாது, $(0, -1)$-ல் y ஆயத்தைக் கடக்கும்.

(a) சமன்பாட்டின் $x^2 = \dfrac{y+1}{y-1}$ என்று எழுதுக. y-ன் மதிப்பு $+$ க்கும் $-$ 1-க்கும் இடையில் இருப்பின், x^2-ன் மதிப்பு குறை எண்ணுகும்; அம் மதிப்புகளுக்குக் கற்பனை எண்ணுகும். ஆதலின், $y = +1, y = -1$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையில் வளைவரை வராது.

(b) y-ன் மதிப்பு எண்ணிலியாயின் x-ன் மதிப்பு ± 1 ஆகும். ஆகவே, $x = 1$, $x = -1$ என்ற கோடுகள் வளைவரைக்கு நெடுநிலைக்குத்துத் தொடுவரைகளாகும்.

(3) $$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$x = 0$ எனின், $\dfrac{dy}{dx} = 0$.

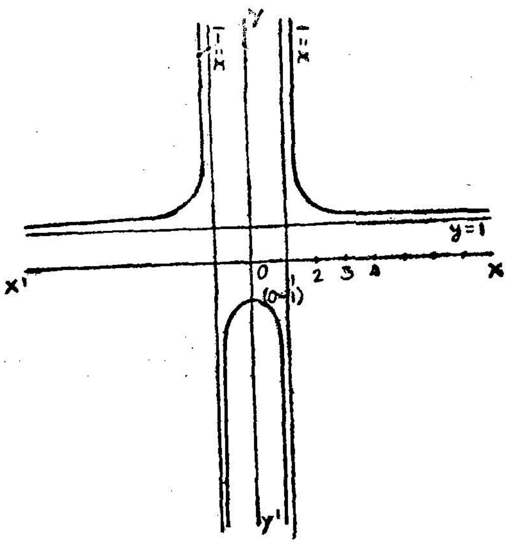
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

ஆகவே, $x = 0$ என்ற நிலையில் வளைவரை மீப்பெரு மதிப்பைக் கொள்ளும். வளைவரையின் மீப்பெரு மதிப்பு $= -1$.

(4) x-ன் பல மதிப்புகளுக்கு ஏற்ற y-ன் மதிப்புகளை அடியிற்கண்ட அட்டவணையிற் காண்க.

x	1	2	3	4	5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$	∞	$\frac{3}{5}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{17}{15}$	$\frac{26}{24}$	$-\frac{17}{15}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{25}{7}$

இவற்றால் தெரியும் வளைவரையின் உருவம் பின்வருமாறு :



படம் 40.

பயிற்சி 2.

$(a^2 + x^2)y = a^2 x$ வளைவரை வரைக.

சமச்சீர் x, y என்பவற்றின் குறியை மாற்றச் சமன்பாட்டில் மாறுதல் நேராது. ஆதலின், எதிர் வட்டங்களில் வளைவரை சமச்சீர் உடையதாகும்.

சிறப்புப் புள்ளிகள். வளைவரை ஆதிவழியாகச் செல்லும்.

$$y = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$$

x-ன் மதிப்பு கூடுமளவிற்கேற்ப y-ன் மதிப்பு குறைந்து வரும். $x = \pm \infty$ என்று இருப்பின் $y = 0$.

$\therefore y = 0$ வளைவரையின் நெடுநிலைக் குத்துத்தொடுவரை

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 (a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^4 - a^2 x^2 - 2a^2 x (3a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^3}$$

இதனால், $x = a$ இடத்து மீப்பெரு மதிப்பையும், $x = -a$ இடத்து மீச்சிறு மதிப்பையும் பெறும்.

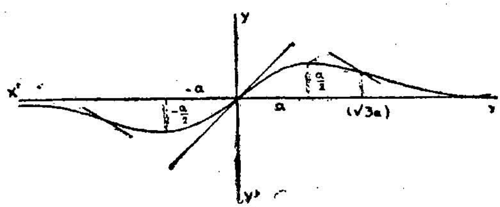
மீப்பெரு மதிப்பு $= \frac{a}{2}$

மீச்சிறு மதிப்பு $= -\frac{a}{2}$

உருமாறும் புள்ளிகள் (0, 0), $\left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\sqrt{3}a - \frac{\sqrt{3}a}{4}\right)$

இப் புள்ளியின் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பு, $1, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}$.

இம் மதிப்புகள் அப் புள்ளிகள் இடத்துத் தொடுவரைகளின் சாய்வுகளாகும். ஆதிவழியாகச் செல்லும் தொடுவரையின் சாய்வு = 45°



படம் - 41

பயிற்சி 3.

$y = (x-1)(x-2)(x-3)$ வளைவரை வரைக.

சமச்சீர் இவ்வளைவரை ஆயங்கள், $x = y$ கோடு, எதிர் கால் வட்டங்கள் என்ற மூன்றோடும் சமச்சீர் பெறுதல் இல்லை.

சிறப்புப் புள்ளிகள் வளைவரை x ஆயத்தை $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ என்ற இடத்திலும், y ஆயத்தை -6-லும் கடக்கும்.

x-ன் மதிப்பு எண்ணிலிக்குக் கூடிச் செல்லச் செல்ல y-ன் மதிப்பும் அங்ஙனமாகும். x-ன் மதிப்பு $-\infty$-க்குக் குறைந்து வரவர, y-ன் மதிப்பும் அவ்வாருகும்.

$x < 3$ எனின், y-ன் மதிப்பு குறை யெண்ணுகும்.

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11$$

$3x^2 - 12x + 11 = 0$ எனின், $x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6}$.

அஃதாவது, அண்ணளவாக $x = 1{\cdot}4$ அல்லது, $2{\cdot}6$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12.$$

ஆகவே, வளைவரை $x = 2{\cdot}6$ இடத்து மீச்சிறு மதிப்பையும், $x = 1{\cdot}4$ இடத்து மீப்பெரு மதிப்பையும் கொள்ளும்.

மீச்சிறு மதிப்பு $= -{\cdot}384$

மீப்பெரு மதிப்பு $= {\cdot}384$

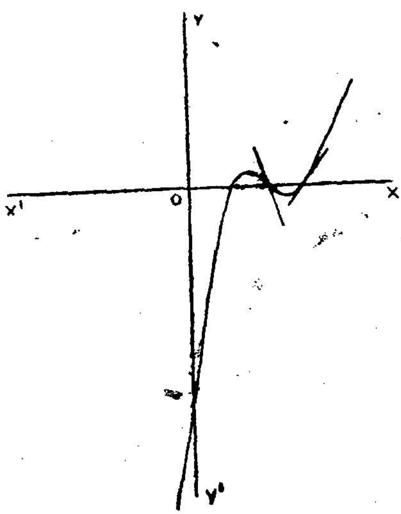
$x = 1, x = 2, x = 3$ என்ற இடங்களில் தொடுவரைகளின் சாய்வு வீதம் $2, -1, +1$

$x = 2$ எனின், $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0.$

ஆகவே, $x = 2$ இடத்து வளைவரையில் உருமாறும் புள்ளி இருக்கும்.

உருமாறும் புள்ளி (2, 0).

வளைவரை பின்வருமாறு :



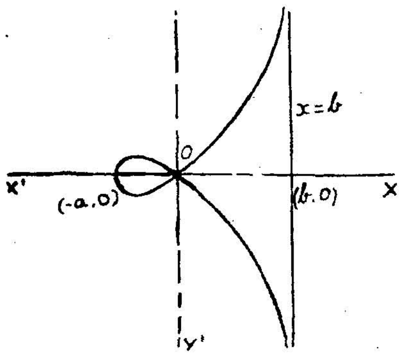
படம்–2

பயிற்சி 4.

வளைவரை $y^2 = x^2 \dfrac{a+x}{b-x}$ வரைக.

வளைவரை x ஆயத்தோடு சமச்சீர் உடையதாய் அதனை $x = 0$, $x = -a$ இடங்களில் கடக்கும். x-ன் மதிப்பு bஐ விடக் கூடுதலாகவும், $-a$ஐ விடக் குறைவாகவும், இருப்பின், y^2-ன் மதிப்பு குறை எண்ணாகும். ஆகவே, x-ன் அம் மதிப்புகளுக்கு y-ன் மதிப்பு கற்பனையாகும்.

$x = b$ எனின், $y = \infty$. ஆகவே, $x = b$ வளைவரைக்கு நெடுநிலைக் குத்துத் தொடுவரையாகும்.



படம் 43.

பயிற்சி 5.

வளைவரை $x^3 + y^3 = 3\,axy$ வரைக.

$x=y$ என்ற கோட்டோடு வளைவரை சமச்சீர் உடையதாகும். வளைவரை அக் கோட்டினைக் கடக்கும் இடங்களை $2x^3 = 3ax^2$ என்ற சமன்பாட்டினால் அறியலாம்.

$$x^2\,(2x - 3a) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ அல்லது } \frac{3a}{2}.$$

சமன்பாட்டின் வகைக்கெழு காணின்,

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3\,ax \frac{dy}{dx} + 3\,ay$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

$$x = \frac{3a}{2}, y - \frac{3a}{2} \text{ என்றிருப்பின், } \frac{dy}{dx} = -\,1$$

ஆகவே, $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ இடத்துத் தொடுவரை x ஆயத்தோடு கூடி $135°$ பிறப்பிக்கும்.

$x = 0$ எனின், y-க்கு இரு சுன்ன மதிப்புகள் வரும். ஆகவே, $x = 0$ வளைவரையின் தொடுவரையாகும்.

$$x^3 + y^3 = 3a\,xy.$$

$$y^3 = 3a\,xy - x^3$$

$$= -x^3\left(1 - \frac{3\,ay}{x^2}\right)$$

$$\therefore y = x\left(1 - \frac{3\,ay}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= -x\left(1 - \frac{ay}{x^2} + \ldots\right)$$

$$= -x + \frac{xy}{x}\ \ldots$$

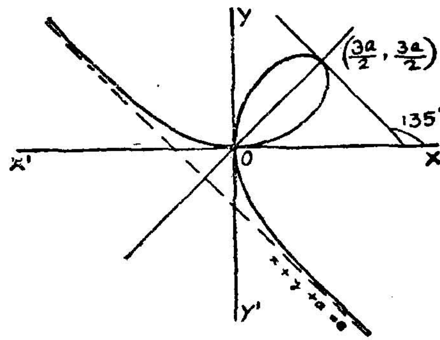
நெடுநிலைக் குத்துத் தொடுவரை $y = -x$-க்கு ஒருபோகுக் கோடாகும்

ஆகவே, நெடுநிலைக் குத்துத் தொடுவரை

$$y + x = \underset{x \to y}{\text{Lt}}\ \frac{ay}{x}.$$

$$= -a.$$

$$x + y + a = 0.$$



படம் 44.

பயிற்சிகள் 39.

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளுக்குரிய வளைவரைகளை வரைக.

1. $y^2 = (x - 1)(x - 2)^2$
2. $y = \dfrac{x}{(2 - x)^2}$
3. $y^2 = \dfrac{x^2 (4 - x)}{3 + x}$
4. $y^2 = \dfrac{x}{3 - x}$
5. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$
6. $y^2 = \dfrac{4 - x}{x}$
7. $y^2 = (a + x) + x^2 (3a - x)$
8. $ay^2 = x^2 (x - a)$
9. $ay^2 = x^2 (a - x)$
10. $9 ay^2 = x (x - 3a)^2$
11. $y^2 (x^2 + y^2) + a^2 (x^2 - y^2) = C$
12. $y^2 (a + x) = (a - x) x^2$
13. $y^2 = (x - 1)^2 (x - 2)$
14. $y^2 (x^2 - a^2) = x^2 (x^2 - 4a^2)$
15. $xy^2 = 4a^2 (2a - x)$
16. $y^2 (2a - x) = x^3$
17. $x^2y^2 = a (x^2 - y^2)$
18. $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = a^2b^2$
19. $x (x + y)^2 = a (x - y)^2$
20. $x^3 = y (x - a)^2$
21. $y^2 = x^4 (x + 2)$
22. $y^2 = \dfrac{x^2 (2 + x)}{2 - x}$
23. $y^2 = \dfrac{x^2 (x + 3)}{2 - x}$

24. $y^2 = x^2 (x - 3)$

25. $y = \frac{1}{3} x - \frac{2}{x}$.

127. *போலார் சமன்பாடுகள்*

போலார் சமன்பாட்டைக் கண்டு வளைவரை வரையப் பின்வருவது போன்றதொரு முறையை மேற்கொள்ளுவது நலம்.

( ) சமன்பாட்டினை விடுவித்து, θ ன் சார்பாக r ஐக் காண்க. θ-க்குரிய பல மதிப்புகளையும் அவற்றிற்கு நிலையான r-ன் மதிப்புகளையும் காட்டி ஓர் அட்டவணை தயார் செய்க. θ-க்கு மிகை மதிப்புகளும் குறை மதிப்புகளும் கொடுத்தல் வேண்டும். பெரும்பான்மையான போலார் சமன்பாடுகளில் sin θ, cos θ...என்றாற் போன்ற பொழுதில் மீளும் (Periodic) சார்புகள் அடங்கியிருத்தலின், சுன்ன முதல் 2π வரையுள்ள மதிப்புகள் θ-க்குக் கொடுப்பது போதும். ஏனெனில், மற்றைய மதிப்புகள் வளைவரையில் புதிய பாகம் ஒன்றையும் காட்டுவதில்லை.

(2) சமச்சீர் θ-வின் குறியை மாற்றிய பின்னரும் x-ன் குறியில் மாற்றம் இல்லையெனின், வளைவரை தொடக்கக் கோட்டோடு (Initial line) சமச்சீர் உடையதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு : $r = a(1 + \cos\theta)$.

r அடங்கிய சமன்பாட்டு உறுப்புகளில் r-ன் இரட்டிய படிகள் மட்டுமே இருப்பின் ஆதியோடு (origin) சமச்சீர் உடையதாகும். அங்கு போல் வளைவரையின் 'மைய' மாகும். $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

(3) tan ϕ-ன் மதிப்பைக் கண்டால் வளைவரையில் எப்புள்ளியிடத்தும் தொடுவரையின் சாய்வினைக் காணலாம்.

(4) r-க்கு எண்ணிலியை மதிப்பாகத் தரும் θ-வின் மதிப்பைப் பார்த்து, அந்தப் போக்கில் (direction) வளைவரைக்கு நெடுநிலைக் குத்துத் தொடுவரை உண்டா என்று காண்க.

(5) சில சமன்பாடுகளில் r-க்கு எல்லைகள் உண்டு எனின், அவ்வெல்லைகளைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு : $r = a \sin n\theta$, r-ன் எல்லைகள், 0, a.

பயிற்சி 6.

$r = a \sin 3\theta$ வளைவரை வரைக.

θ-க்கு உரிய பல மதிப்புகளையும், அவற்றிற்கு எதிர் நிலையான r-ன் மதிப்புகளையும் பின்வரும் அட்டவணை காட்டும்:

3θ	0	இடை மதிப்புகள்	$\frac{\pi}{2}$	இடை மதிப்புகள்	π	இடை மதிப்புகள்
θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$	
r	0	கூடும் மிகை மதிப்புகள்	a	குறையும் மிகை மதிப்புகள்	0	குறையும் குறை மதிப்புகள்

$\frac{\pi}{32}$	இடை மதிப்புகள்	2π
$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$-a$	கூடுங் குறை மதிப்புகள்	0

r-ன் எல்லைகள் $0, x$,

$$\tan\phi = \tfrac{1}{3}\tan 3\theta.$$

r-ன் மதிப்புச் சுன்னமாயின் $3\theta = 0$, அல்லது π அல்லது 2π ஆகவே, அம் மதிப்புகளுக்கு $\phi = 0$.

ஆதலின், தொடக்கக்கோடு $\theta = 0, \theta = \pi, \theta = 2\pi$ என்ற இவ் விடங்களில் வளைவரைக்குத் தொடுவரையாகும்.

$r = a$ என்றிருப்பின் $a = a \sin 3\theta$.

ஆகவே, $3\theta = \frac{\pi}{2}$.

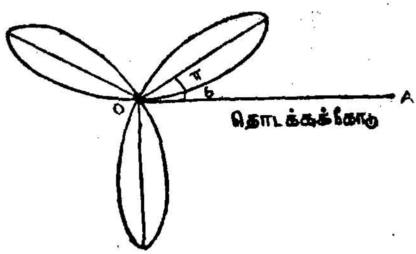
அஃதாவது, $\theta = \frac{\pi}{6}$. இங்கு $\tan\phi = \frac{1}{3}\tan\frac{\pi}{2} = \infty$

$\therefore \phi = \frac{\pi}{2}$.

ஆகவே, $\left(\frac{\pi}{6}, a\right)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை ஆயத் தொலைக்கு நேர் குத்துக் கோடாகும்.

இவ்வாறே, $\left(\frac{5\pi}{6},\ a\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\ a\right)$ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரைகள் ஆரைத்தொலைகளுக்கு நேர் குத்துக் கோடுகளாகும்.

வளைவரையின் படம் இது.



படம் : 45

பயிற்சி 2.

$r = a \sin 4\theta$ வளைவரை வரைக.

4θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	7 [illegible]	4π
θ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{4}$
r	0	a	0	$-a$	0	a	0	$-a$	0

$\tan\theta = \frac{1}{4}\tan 4\theta$.

r-ன் மதிப்புச் சுன்னமாயின் $\sin 4\theta$-ன் மதிப்பும் சுன்னமாகும்.

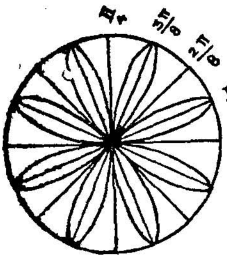
அப்பொழுது, $4\theta = \pm n\pi$

அந் நிலையில், $\tan\phi = \frac{1}{4}\tan, (\pm n\pi) = 0$,

r-ன் மதிப்பு $\pm a$ ஆக இருப்பின் $\tan\phi = \infty$ ஆகும்.

ஆகவே, இவ் வளைவரையில் ஒன்று போன்ற பல கண்ணிகள் (loops) போலோடு சமச்சீராக உள. அவை அனைத்தும்

மையத்துப் போலும், ஆரை a-ம், உடைய ஒரு வட்டத்துள் உள.



படம் 46

$r = a \sin n\theta$ வகையில் வரும் வளைவரைகளில் n ஒற்றை எண்ணுயின், n கண்ணிகளும், n இரட்டை எண்ணுயின் $2n$ கண்ணிகளும் இருக்கும். இவ்வாறே, $r = a \cos n\theta$ சமன்பாடுடைய வளைவரைகளை வரையலாம்.

பயிற்சி 3.

$r = a + b \cos\theta$ வளைவரை வரைக.

முதல் வகை

$a > b$ என்று கொள்வோம்.

இங்கு $r = 3 + 2 \cos\theta$ வளைவரை வரைவோம்.

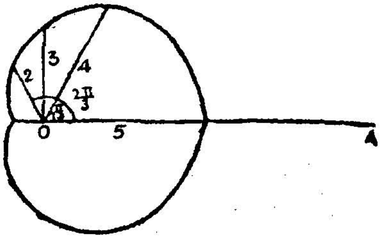
θ	0	இடை மதிப்புகள்	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	5	குறையும் மிகை மதிப்புகள்	4	3	2	1

θ-வின் குறியை மாற்றினும், அஃதாவது θ-க்கு $-\theta$ஐப் பதிலாக்கினும், சமன்பாட்டில் மாறுதல் இல்லாததினுல் வளைவரை தொடக்கக் கோட்டோடு சமச்சீர் உடையதாகும்.

$$\tan\phi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{3 + 2\cos\theta}{-2\sin\theta}$$

$\theta = 0$ எனின், $\tan\phi = \infty$

$\theta = \pi$ எனின், $\tan\phi = \infty$.



படம் 47.

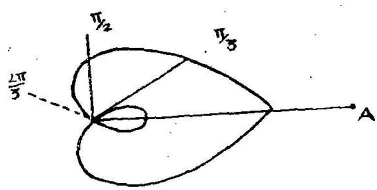
இரண்டாவது வகை

$a < b$ என்று கொள்வோம். இங்கு $r = 1 + 2\cos\theta$ வளைவரை வரைவோம். இவ் வளைவரை தொடக்கக் கோட்டோடு சமச்சீர் உடையதாகும்.

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	இடை மதிப்புகள்	π
r	3	2	0	குறை மதிப்புகள் கூடுந்தன்மையன	-1

$$\tan\phi = \frac{1 + 2\cos\theta}{-2\sin\theta}$$

$\theta = 0, \pi$ எனின், $\tan\phi = \infty$. ஆகவே, இப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரை தொடக்கக் கோட்டோடு நேர் குத்துக் கோடாகும்.



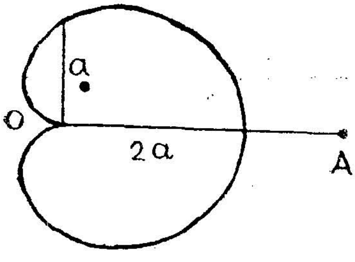
படம் - 48

மூன்றாவது வகை

$a = b$. $r = a(1 + \cos\theta)$. இவ் வளைவரை நெஞ்சுவளை எனப்படும். இவ் வளைவரை தொடக்கக் கோட்டோடு சமச்சீர் உடையதாகும்.

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	$2a$	$\frac{3a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0

பயிற்சி 4.



படம்-49

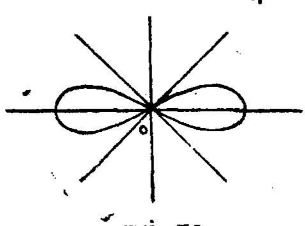
$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (Leminiscale of Bernoulli)

θ-ன் குறியும் r-ன் குறியும் மாற்றப்படினும், சமன்பாட்டில் மாறுதல் இல்லாததால் வளைவரை தொடக்கக் கோட்டோடும், போலோடும் சமச்சீர் உடையதாகும்.

$\cos 2\theta$-ன் மதிப்பு குறையாயின் r^2-ன் மதிப்பு குறையாகும். இந் நிலையில், r-க்குக் கற்பனை மதிப்புத்தான் வரும். ஆகவே, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே தான் வளைவரை இருக்கும்.

$\theta = +\frac{\pi}{4}$ அல்லது, $+\frac{3\pi}{4}$ அல்லது, $+\frac{5\pi}{4}$ எனின் $r = 0$.
$\theta = 0$ அல்லது π எனின், $r = +a$.

θ-ன் மதிப்பு $-\frac{\pi}{4}$-ல் இருந்து சுன்னத்துக்குக் கூடுகையில் r-ன் மதிப்பு சுன்னத்திலிருந்து a-க்கும் கூடும். θ-ன் மதிப்பு சுன்னத்திலிருந்து $\frac{\pi}{4}$-க்குக் கூடுகையில், r-ன் மதிப்பு a-லிருந்து சுன்னத்துக்குக் குறையும். r-ன் மதிப்பு முடிவிலா எண்ணுகவோ, a-க்குப் பெரிதாகவோ யாண்டும் வராது. இவ் வளைவரை ஒன்று போலுள்ள இரு கண்ணிகளைக் கொண்டதாகும்.



படம் - 50

பயிற்சிகள் 40.

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளுக்குரிய வளைவரைகளை வரைக.

(1) $r = a\,(2\cos\theta + 1)$

(2) $r = a\,(2\cos\theta - 1)$.

(3) $r = a\theta$

(4) $r\theta = a$

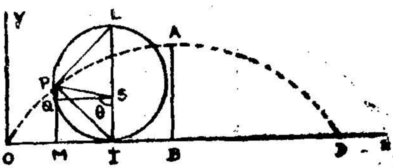
(5) $r = ae^{\theta\cot a}$

(6) $r = \dfrac{a}{\theta^{\frac{1}{2}}}$.

நன்கறிந்த வளைவரைகள்

128. உருள்வளை (Cycloid)

நிலைக்கோடு ஒன்றின்மேல் வழுக்காமல் உருளும் வட்டத்தின் வளைவரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை உருள்வளை எனவும், அவ் வட்டம் பிறப்பிக்கும் வட்டம் (Generating circle) எனவும் பெயர் பெறும். அடியை *OD* என்றும், பிறப்பிக்கும் வட்டம் *LPI*-ல் உள்ள புள்ளியை *P* என்றும், ஆரை *SP*, ஆரை *SI* ஆகியவற்றின் இடைப்பட்ட கோணத்தை θ என்றும், வட்டத்தின் தொடு குத்தினை 1 என்றும் கொள்வோம்.



படம் 51

பிறப்பிக்கும் வட்டம் உருளுந் தொடக்கத்தில் *P*-ன் நிலையை *O* என்று கொள்வோம். *OD*-க்குச் செங்குத்தாக *SQ* வரைக. $OM = x$, $MP = y$. பிறப்பிக்கும் வட்டத்தின் ஆரை a என்று கொள்ளின்,

$$\begin{aligned} OI &= \text{வில் } PI \\ &= a\,\theta \\ x &= OM \\ &= OI - MI \\ &= OI - SP\cos(\theta - 90^\circ) \\ &= a\,\theta - a\sin\theta \\ &= a\,(\theta - \sin\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= MP \\ &= IS + QP \\ &= a + SP \sin(\theta - 90°) \\ &= a - a\cos\theta \\ &= a(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

$\therefore \quad x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ என்பவை உருள் வளையின் சமன்பாடுகள்.

$\theta = \pi$ என்றிருப்பின், $x = \pi a = OB$. அப்பொழுது P-ன் நிலை A என்ற புள்ளி இடத்ததாகும்.

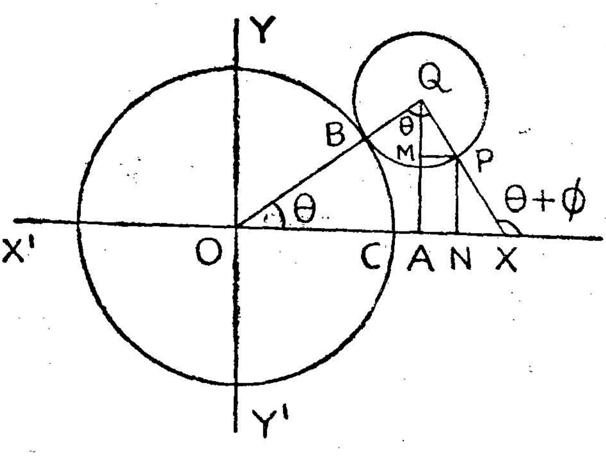
$\theta = 2\pi$ என்றிருப்பின் $x = 2\pi a = OD$. அப்பொழுது P-ன் நிலை D ஆகும்.

வளைவரை OAD, BA-வுடன் சமச்சீர் உடையதாகும். BA உருள்வளையின் அச்சு எனப்படும்.

129. புறவுருள்வளை, அகவுருள்வளை (Epicycloid, Hypocycloid)

ஒரு வட்டத்தின் வளைவரையில் உள்ள புள்ளி ஒன்றின் இயங்குவரை, அவ் வட்டம் ஒரு நிலை வட்டத்தின் புறத்தே வழுக்காமல் உருளுமாயின், புறவுருள்வளை (Epicycloid) எனவும், அகத்தே உருளுமாயின், அகவுருள்வளை (Hypocycloid) எனவும் பெயர்பெறும்.

புறவுருள்வளை



படம்-52

நிலைவட்டத்தின் மையமான O-வை ஆதியாகக் கொள்க. புறவட்டம் உருளுந் தொடக்கத்து P-ன் நிலையை C என்றும், $C\hat{O}Q$ ஐ θ என்றும், $B\hat{Q}P$ ஐ ϕ என்றும், வட்டங்களின் ஆரை

களை R, r என்றும் கொள்வோம். OCஐ x ஆயமாகவும், O இடத்து OC-க்கு நேர்குத்தாக வரையப்படும் கோட்டினை y ஆயமாகவும், P-ன் ஆயத்தொலைகளை x, y ஆகவும் கொள்க.

$$\begin{aligned} x &= ON \\ &= OA + MP \\ &= OQ \cos\theta + PQ \cos QPM \\ &= (R + r)\cos\theta + r\cos(180 - \overline{\theta + \phi}) \\ &= (R + r)\cos\theta - r\cos(\theta + \phi) \end{aligned}$$

வில் BC = வில் BP $\therefore R\theta = r\phi$

$$\phi = \frac{R\theta}{r}.$$

$$\begin{aligned} \therefore\ x &= (R + r)\cos\theta - r\cos\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) \\ &= (R + r)\cos\theta - r\cos\frac{R + r}{r}\theta \end{aligned}$$

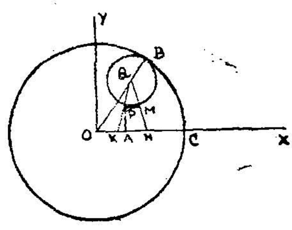
$$\begin{aligned} y &= NP \\ &= AQ - MQ \\ &= (R + r)\sin\theta - r\sin(\theta + \phi) \\ &= (R + r)\sin\theta - r\sin\left(\theta + \frac{R\theta}{r}\right) \\ &= (R + r)\sin\theta - r\sin\frac{R + r}{r}\theta \end{aligned}$$

அகவுருள்வளை

அகவுருள்வளையில் புள்ளி ஒன்றின் ஆயத் தொலைகளை முன் போலவே காண,

$$x = (R - r)\cos\theta + r\cos\frac{R - r}{r}\theta$$

$$y = (R - r)\sin\theta - r\sin\frac{R - r}{r}\theta$$



படம்-53

130. இச் சமன்பாடுகளால் இரு சிறப்பான வளைவரைகளின் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

(1) $R = r$ என்று கொள்வோம்.

புறவுருள்வளையின் சமன்பாடுகளால் அறியப்படுவன :

$$x = R\,(2\cos\theta - \cos 2\theta)$$

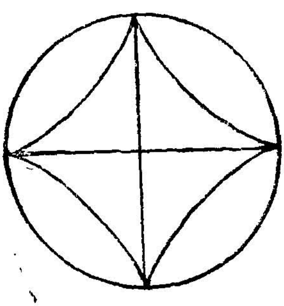
$$y = R\,(2\sin\theta - \sin 2\theta)$$

இவை நெஞ்சு வளையின் சமன்பாடுகளாகும். புறவுருள் வளையில் Cஐப் போலாகவும், P-ன் போலார் துணை எண்களை (r, θ) ஆகவும் கொள்ளின்,

$$\begin{aligned} r\cos\theta &= CN \\ &= ON - OC \\ &= R\,(2\cos\theta - \cos 2\theta) - R \\ &= 2R\cos\theta - R\,(1 + \cos 2\theta) \\ &= 2R\cos\theta - 2R\cos^2\theta. \\ &= 2R\cos\theta\,(1 - \cos\theta) \\ \therefore\ r &= 2R\,(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

நிலை வட்டத்தின் ஆரை a ஆயின் நெஞ்சுவளையின் போலார் சமன்பாடு $r = 2a\,(1 - \cos\theta)$.

(2) $R = 4r$ எனின், அகவுருள்வளையின் சமன்பாடுகள் பின்காணுமாறு மாறும்:



படம்-54

$$4x = R\,(3\cos\theta + \cos 3\theta) = 4a\cos^3\theta.$$

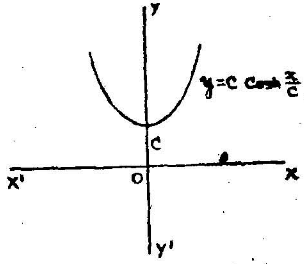
$$\therefore\ x^{1/3} = a^{1/3}\cos\theta.$$

இவ்வாறே, $y^{1/3} = a^{1/3}\sin\theta.$

$$\therefore\ x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

இவ் வளைவரை நான்கு பிறைக் கோடுடைய அகவுருள் வளை (four cusped hypocycloid) எனப்படும்.

கயிற்றுவளை : ஏற்றத் தாழ்வில்லாத நிறையுடைய ஒரு கயிற்றின் இரு முனைகளையும் சம உயரமுடைய இரு புள்ளிகளில் தொய்யக் கட்டியக்கால், உண்டாகும் வளைவரை கயிற்றுவளை எனப்படும்.



படம்-55

அதன் வடிவம் :

$$y^2 4\,ax,\ = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ xy = c^2.$$

இச் சமன்பாட்டு வளைவரைகளை இயல்முறை வடிவக் கணித வாயிலாக அறிந்திருப்பீர்கள். ஆதலின், அவை இங்கு விளக்கப்படவில்லை.

கலைச்சொற்கள்

A

Algebra — இயற் கணிதம்
Acceleration — விசை மாறு வீதம்
Acceleration angular — கோண விசை மாறு வீதம்
Angle — கோணம்
Angle of depression — இறக்கக் கோணம்
Angle of elevation — ஏற்றக் கோணம்
Angle, intersecting — வெட்டுங் கோணம்
Angle, right — செங்கோணம்
Angle, semivertical — உச்சிக் கோணப் பாதி
Angle, vectorial — தொலைக் கோணம்
Approximately — அண்ணளவாக
Arc — வில்
Area — பரப்பளவு, பரப்பு
Asymptote — நெடுநிலை அல்லது நீளத் தொடுவரை
Axis — அச்சு, ஆயம்
Axis, major — நெட்டச்சு
Axis, minor — குற்றச்சு

B

Bending moment — வளைவு நெம்புத்திறன்
Binomial — ஈருறுப்புச் சேர்ப்பு
Breadth — அகலம்

C

Calculations — கணக்கீடுகள்
Calculus — நுண்கணிதம்

Calculus, Differential	—	வகை நுண்கணிதம்
Calculus, Integral	—	தொகை நுண்கணிதம்
Cardioid	—	நெஞ்சுவளை
Catenary	—	கயிற்றுவளை
Centre	—	மையம்
Chemical reaction	—	வேதி எதிர் வினை
Chord	—	நாண்
Circle	—	வட்டம்
Circumference	—	சுற்றளவு, வட்டவரை
Concavity	—	குழிவு
Condition	—	கட்டுப்பாடு
Coefficient	—	கெழு
Coefficient, differential	—	வகைக் கெழு
Coefficient, liner expansion	—	நீட்டப் பெருக்கக் கெழு
Coefficient, numerical	—	எண் கெழு
Coefficient, of friction	—	பிணர்வுக் கெழு
Coefficient, partial differential		பகுப்பு வகைக் கெழு
Coefficient, successive differential		அடுத்தடுத்த வகைக் கெழு
Coefficient, total differential	—	கூடிய வகைக் கெழு
Cone	—	வட்டக் கூம்பு
Conic	—	கூம்புவெட்டு
Conjugate	—	துணையிய
Constant	—	மாரு ராசி
Contact, point of	—	தொடுகுத்து
Continuous	—	தொடர்ந்த
Conversely	—	தலை மாற்றியுரைக்கின்
Convexity	—	குவிவு
Co-ordinates	—	ஆயத் தொலைகள்
Co-ordinates polar	—	போலார் துணையெண்கள்
Corollary	—	கிளைத் தேற்றம்
Corresponding	—	நேர் நிலையான
Cosine	—	கிடக்கை
Cube	—	கன சதுரம்
Curvature	—	வளைவு

Curvature, centre of — கோட்ட மையம்
Curvature, circle of — கோட்ட வட்டம்
Curvature, radius of — கோட்ட ஆரை
Curve — வளைவரை
Curved — வளைந்த
Cyclic — ஒரு வட்ட
Cycloid — உருள்வளை
Cycloid, epi — புற உருள்வளை
Cycloid, hypo — அக உருள்வளை
Cylinder — வட்டவுருட்டு

D

Decimal — பதின் பகுப்பு
Definition — வரையறை
Denominator — பின்னக் கீழ் எண்
Density — செறிவு
Diagonal — மூலைவரை
Diameter — விட்டம்
Differentiation — வகைக்கெழு காணுதல்
Direction — போக்கு, திசை

E

Electro-motive force — மின்னுந்து
Eliminate — நீக்கு, விலக்கு
Ellipse — நீள் வட்டம்
Equation — சமன்பாடு
Equation, cubic — முப்படிச் சமன்பாடு
Equation, differential — வகைக்கெழுச் சமன்பாடு
Equation, polar — போலார் சமன்பாடு
Error — பிழை
Error, absolute — தனிப் பிழை
Error, percentage — நூற்றுவீதப் பிழை
Error, relative — ஒப்புப் பிழை
Evolute — பிறப்பு வளை

Expansion — விரிவு
Expression — கோவை

F

Factor — சினை
Factor, common — பொதுச் சினை
Factorisation — சினை காணல்
Finite — முடிவுள்ள
Fixed — நிலைத்த
Fixed line — நிலைக் கோடு
Fixed-point — நிலைப் புள்ளி
Focal-length — குவியத்தொலை
Form — உருவம்
Formula — வாய்பாடு
Fraction — பின்னம்
Fraction, rational — அளவுக் கிணங்கிய பின்னம்
Function — சார்பு, சார்பலன்
Function, continuous — தொடருடைச் சார்பு
Function, decreasing — குறையுஞ் சார்பு
Function, discontinuous — தொடரில் சார்பு
Function, even — இரட்டைச் சார்பு
Function, explicit — வெளிப்படு சார்பு
Function, homogeneous — சமபடித்தான சார்பு
Function, hyperbolic — கந்தழிச் சார்பு
Function increasing — கூடுஞ் சார்பு
Function inverse — எதிர் மறைச் சார்பு
Function inverse hyperbolic — எதிர் மறைக் கந்தழிச் சார்பு
Function, implicit — உட்படு சார்பு
Function many valued — பன் மதிப்புடைய சார்பு
Function odd — ஒற்றைச் சார்பு
Function of a function — சார்பின் சார்பு
Function, single valued — ஒரு மதிப்புடைய சார்பு
Function, trigonometrical — கோண கணிதச் சார்பு
Functional relation — சார்புத் தொடர்பு

G

Generalise	—	பொதுப்படையாக்கு
Geometry	—	வடிவ கணிதம்
Gradient	—	சாய்வு வீதம்
Gravity	—	புவிக் கவர்ச்சி

H

Hyberbola	—	அதிபரவளையம்
Hyperbola, rectangular	—	செங்கோண அதிபரவளையம்
Hyperbolic cosine	—	கந்தழி கிடக்கை
Hyperbolic sine	—	கந்தழி நெடுக்கை
Hyperbolic tangent	—	கந்தழி இருக்கை
Hypotenuse	—	எதிர்சிறைப் பக்கம்

I

Inclination	—	சாய்வு
Increment	—	கூடுந் தொகை
Indeterminate	—	தேரப்பெறுத
Induction	—	உய்த்தறிதல்
Infinity	—	எண்ணிலி
Integer	—	முழு எண்
Intercept	—	வெட்டுத் துண்டு
Initial line	—	தொடக்கக் கோடு

L

Limit	—	எல்லை
Locus	—	இயங்குவரை
Logarithm	—	மடக்கை
Logarithm, anti	—	இன மடக்கை

M

Motion	—	இயக்கம்
Multiple, odd	—	மடங்கு

N

Normal — செங்கோடு
Number — எண்
Number, negative — குறையெண்
Number, positive — மிகை எண்
Numerator — ஒற்றைப்படையான மடங்கு

O

Ordinate — குத்தாயம்
Ordinate, double — இரட்டைக் குத்தாயம்
Origin — ஆதி
Orthogonal — செங்கோண வெட்டான

P

Parabola — பரவளையம்
Parallel — ஒருபோகு
Parallel stright lines — ஒருபோகுக் கோடுகள்
Parallelopiped — முப்போகுக் கட்டி
Pendulum — ஊசலி
Pendulum, simple — இயல்பு ஊசலி
Perimeter — சுற்றளவு
Point — புள்ளி
Point of inflexion — உரு மாறும் புள்ளி
Pole — போல்
Polynomial — பல்லுறுப்புச் சேர்ப்பு
Pressure — அமுக்கம்
Proof — தெரிப்பு
Property — பண்பு
Protractor — கோண அளவி

Q

Quadratic — இருபடிய
Quadrilateral — நாற்சிறை
Quotient — ஈவு

R

Radian	—	ஆரைக் கோணம்
Radius	—	ஆரை
Radius vector	—	ஆரைத் தொலை
Ratio	—	தகவு
Ratio inverse	—	மாறுன தகவு
Rectangle	—	நீள் சதுரம்
Remainder	—	மீதி
Resistance	—	பிணர்வு
Resistance, external	—	வெளிப் பிணர்வு
Resistance, internal	—	உட் பிணர்வு
Rigidity	—	விறைப்பு
Roots	—	தீர்வுகள்
Roots, equal	—	சம தீர்வுகள்
Roots, imaginary	—	கற்பனைத் தீர்வுகள்
Roots, real	—	இயல்புத் தீர்வுகள்

S

Sector	—	வட்டப் பகுதி
Series	—	தொடர்
Series, convergent	—	எல்லையுள் தொடர்
Series, divergent	—	எல்லையில் தொடர்
Series, infinite	—	முடிவிலாத் தொடர்
Series, geometric	—	பெருக்கத் தொடர்
Series, oscillatory	—	ஊசலாடும் தொடர்
Sign	—	குறியீடு
Sine	—	நெடுக்கை
Sphere	—	கோளம்
Square	—	சதுரம்
Sub-normal	—	அடிச் செங்கோடு
Sub-tangent	—	அடித் தொடுவரை அல்லது அடித் தொடு கோடு
Substitute	—	ஈடு கொடு
Symmetry	—	சமச்சீர்

T

Tangent	—	தொடுவரை
Tangent (Trigo)	—	இருக்கை
Theorem	—	தேற்றம்
Transformation	—	உருமாற்றம்
Trigonometry	—	கோண கணிதம்

V

Value	—	மதிப்பு
Value, approximate	—	அண்ணளவு மதிப்பு
Value, imaginary	—	கற்பனை மதிப்பு
Value, indeterminate	—	தேரப்பெருத மதிப்பு
Value, maximum	—	மீப்பெரு மதிப்பு
Value, minimum	—	மீச்சிறு மதிப்பு
Value, negative	—	குறை மதிப்பு
Value, positive	—	மிகை மதிப்பு
Value, real	—	அசல் மதிப்பு
Variable	—	மாறு ராசி
Variable, dependent	—	சார்புடை மாறி
Variable, independent	—	சார்பில் மாறி
Velocity	—	விசை
Velocity, angular	—	கோண விசை
Velocity, initial	—	தொடக்க விசை
Vertex	—	கோண உச்சி
Voltaic cell	—	வால்டாக் கலம்
Volume	—	பருமம், கொள்ளளவு, கன அளவு

W

Width	—	அகலம்

Z

Zero		சுன்னம்